

Tentamen i matematisk statistik för KI2 den 19 dec 2007

Uppgift 1: Man brukar skilja på 4 olika blodtyper nämligen O, A, B och AB. Anta att andelen personer i Sveriges befolkning som har dessa blodtyper är

O	A	B	AB
44%	42%	10%	4%

Anta att man slumpmässigt väljer ut 2 personer ur Sverige befolkning.

- a) Vad är sannolikheten att båda har blodtypen A?
- b) Vad är sannolikheten att båda har samma blodtyp?

(6 poäng)

Uppgift 2: Anta att väntetiden på stombussen under morgonen kan beskrivas av en rektangelfördelning i intervallet 0-5 minuter. Även på eftermiddagen kan väntetiden beskrivas av samma rektangelfördelning. Det betyder att den totala väntetiden under dagen kan beskrivas av frekvensfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0.04x & 0 < x < 5 \\ 0.4 - 0.04x & 5 \leq x < 10 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

- a) Hur stor är sannolikheten att den totala väntetiden är kortare än 2 minuter?
- b) Hur stor är sannolikheten att den totala väntetiden är kortare än 7 minuter?
- c) Anta att en student under en dag åker med stombussen till och från skolan. Beräkna den genomsnittliga tid som han totalt får vänta under en dag?

(7 poäng)

Uppgift 3: Låt ξ beteckna avståndet i meter som ett djur måste förflytta sig från sin födelse tills det hittar ett ledigt revir. För en speciell pungråtta gäller att ξ är exponentialfördelad med $\lambda = 0.01386$.

- a) Beräkna sannolikheten att en sådan råtta måste förflytta sig längre än 100 meter för att hitta ett ledigt revir?
- b) Anta att man studerar 10 slumpmässigt utvalda pungråttor födda långt ifrån varandra. Vad är sannolikheten att minst en av dem måste förflytta sig längre än 100 meter för att hitta ett ledigt revir?

(6 poäng)

Uppgift 4: Den tid det tar för en bilförare att reagera på bromsljusen på ett framförvarande fordon är viktig när det gäller att undvika en kollision i en bilkö. En artikel i en facktidning (*Ergonomics*, 1993, 391-395) beskriver ett omfattande försök som behandlar detta. Man uppskattade då reaktionstiden med en normalfördelning med $\mu = 1.25$ sekunder och $\sigma = 0.46$ sekunder.

- Vad är sannolikheten att en person har en reaktionstid som är kortare än 1.75 sekunder?
- Anta att vi studerar 100 bilförare. Vad är sannolikheten att deras sammanlagda reaktionstid är längre än 3 minuter och 2 sekunder?

(6 poäng)

Uppgift 5: Ett fullständigt 2^4 -försök genomfördes för att undersöka hur de fyra faktorerna A, B, C och D påverkade en speciell situation. Följande resultat erhöles:

A	B	C	D	y
-	-	-	-	27.22
+	-	-	-	25.19
-	+	-	-	23.23
+	+	-	-	18.93
-	-	+	-	25.32
+	-	+	-	22.61
-	+	+	-	26.80
+	+	+	-	20.20
-	-	-	+	44.53
+	-	-	+	42.44
-	+	-	+	43.78
+	+	-	+	37.66
-	-	+	+	42.16
+	-	+	+	38.97
-	+	+	+	48.85
+	+	+	+	42.05

- Beräkna huvudeffekten för faktorn D och samspelseffekten BC.
- Rita en samspelsgraf över samspelet BC. Låt B beskrivas av x-axeln.

(6 poäng)

Uppgift 6: Anta att du skall genomföra ett 2^{7-2} -faktorförsök med faktorerna A, B, C, D, E, F och G. Man har beslutat att använda generatorerna $F = ABCD$ och $G = CDE$.

- Hur många försök krävs för detta försöksupplägg?
- Bestäm de definierande relationerna.
- Vilken upplösning får man?
- Vilka alias får faktorn A?

(7 poäng)

Uppgift 7: Provbörningar efter olja har gjorts på ett antal platser i havet. För att undersöka om det skett en förändring av blyhalten (mg/kg torrsustans i sediment gjordes mätningar på några av provplatserna både före och efter börningarna. Värdena på förändringarna blev:

6.8, -1.1, 0.4, 7.5, 8.1, 9, 6.5, 3.6, 1.6

Undersök på signifikansnivån 1% om man kan påvisa någon förändring. Ange variabel, modell och hypoteser. Vad blir slutsatsen? Formulera den även i klartext.
(4 poäng)

Uppgift 8: Ett experiment med ozon har utförts där veteplantor har utsatts i 20 dagar för tre olika ozonhalter i luften. Därefter har man gjort mätningar av kloroplasttytor i bladen. Man fick följande mätvärden för ytorna.

Låg ozonhalt	Normal ozonhalt	Hög ozonhalt
13.1	11.3	9.9
10.7	13.4	8.9
12.2	12.8	9.7
12.9	13.1	9.8
12.3	12.5	10.2

Man har utfört en variansanalys för att testa om det finns någon signifikant skillnad mellan väntevärdena för kloroplastytan vid de olika ozonhalterna. Det visade sig att p-värdet blev ca 0.0001 och att värdet på testvariabeln blev 21.2. Vad blir din slutsats om signifikansnivån är vald till 5%?

(8 poäng)

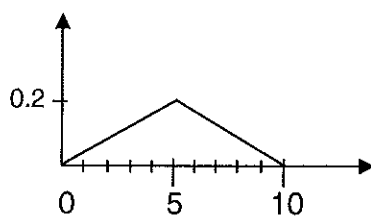
Lösningar till Matematisk statistik för KI2 den 19/12-07

Uppgift 1: $P(O) = 0.44$ $P(A) = 0.42$ $P(B) = 0.10$ $P(AB) = 0.04$

a) $P(A \cap A) = 0.42 \cdot 0.42 = 0.1764$

b) $P(A \cap A) + P(B \cap B) + P(C \cap C) + P(D \cap D) =$
 $= 0.44 \cdot 0.44 + 0.42 \cdot 0.42 + 0.10 \cdot 0.10 + 0.04 \cdot 0.04 = 0.3816$

Uppgift 2 ξ = total väntetid



$$f(x) = \begin{cases} 0.04x & 0 < x < 5 \\ 0.4 - 0.04x & 5 \leq x < 10 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

a) $P(\xi < 2) = \int_0^2 0.04x \, dx = \left[\frac{0.04x^2}{2} \right]_0^2 = \left[\frac{0.04 \cdot 2^2}{2} - 0 \right] = 0.08$

b) $P(\xi < 7) = \int_0^5 0.04x \, dx + \int_5^7 (0.4 - 0.04x) \, dx = \left[\frac{0.04x^2}{2} \right]_0^5 + \left[0.4x - \frac{0.04x^2}{2} \right]_5^7 =$
 $= \left[\frac{0.04 \cdot 5^2}{2} - 0 \right] + \left[(0.4 \cdot 7 - \frac{0.04 \cdot 7^2}{2}) - (0.4 \cdot 5 - \frac{0.04 \cdot 5^2}{2}) \right] =$
 $= 0.5 + [1.82 - 1.5] = 0.82$

c) $E(\xi) = 5$ på grund av symmetrin

Uppgift 3:

a) $\xi = \text{Exp}(\lambda = 0.01386)$

$$P(\xi > 100) = 1 - P(\xi < 100) = 1 - (1 - e^{-100 \cdot 0.01386}) \approx 0.25$$

b) η = antal pungråttor som uppfyller villkoret i a-uppgiften
 $\eta = \text{Bin}(n, p) = \text{Bin}(10, 0.25)$

$$P(\eta \geq 1) = 1 - P(\eta = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0.25^0 \cdot 0.75^{10} \approx 0.9437$$

Uppgift 4:

a) ξ = reaktionstid i sek $\xi = N(1.25, 0.46)$

$$P(\xi < 1.75) = P(Z < \frac{1.75 - 1.25}{0.46}) = P(Z < 1.09) = 0.8621$$

b) η = sammanlagd reaktionstid hos 100 bilförare $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{100}$

$$E(\eta) = E(\xi_1) + E(\xi_2) + \dots + E(\xi_{100}) = 100 \cdot 1.25 = 125$$

$$\text{Var}(\eta) = \text{Var}(\xi_1) + \dots + \text{Var}(\xi_{100}) = 100 \cdot 0.46^2 \Leftrightarrow S(\eta) = 10 \cdot 0.46 = 4.6$$

$$P(\eta > 182) = 1 - P(\eta < 182) = 1 - P(Z < \frac{182 - 125}{4.6}) =$$

$$= 1 - P(Z < 12.39) \approx 1 - 1.0000 = 0.0000$$

Uppgift 5:

$$a) \ell_D = \frac{44.53 + 42.44 + 43.78 + 37.66 + 42.16 + 38.97 + 48.85 + 42.05}{8} -$$

$$- \frac{27.22 + 25.19 + 23.23 + 18.93 + 25.32 + 22.61 + 26.80 + 20.20}{8} = 18.8675$$

$$\ell_{BC} = \frac{27.22 + 25.19 + 26.80 + 20.20 + 43.78 + 36.66 + 48.85 + 42.05}{8} -$$

$$- \frac{23.23 + 18.93 + 25.32 + 22.61 + 44.53 + 42.44 + 42.16 + 38.97}{8} = 1.695$$

b)

$$B.C. = 34.845$$

$$B.C_+ = 32.265$$

$$B_+C. = 30.900$$

$$B_+C_+ = 34.475$$

Uppgift 6:

- a) $2^{7-2} = 2^5 = 32$ försök
- b) 3 definierande relationer.
 $I_1 = ABCDF$
 $I_2 = CDEG$
 $I_3 = I_1 \cdot I_2 = \cancel{ABCDF} \cdot \cancel{CDEG} = ABEG$
- c) upplösningen är IV
- d) Alias till A
 $A \cdot I_1 = \cancel{A} \cdot \cancel{ABCDF} = BCDF$
 $A \cdot I_2 = \cancel{A} \cdot \cancel{CDEG} = ACDEG$
 $A \cdot I_3 = \cancel{A} \cdot \cancel{ABEG} = BEG$

Uppgift 7: ξ = förändring av blyhalten Modell: ξ är $N(\mu, \sigma^2)$. Gör ett t-test.
Hypoteser: $H_0: \mu = 0$, $H_1: \mu \neq 0$ och signifikansnivån $\alpha = 0.01$. Testvariabeln är t-fördelad med 8 frihetsgrader. Kritiska gränser är 3.36 och -3.36. Värdet på testvariabeln blev ca 3.84 och är större än 3.36 (kritisk övre gräns). H_0 kan förkastas eftersom värdet på testvariabeln ligger i förkastelseområdet. Man kan på signifikansnivån 1% påvisa en förändring (ökning) av den förväntade blyhalten i sediment.

Uppgift 8: Kritiskt värde (gräns till förkastelseområdet) är 3.89 (frihetsgraderna i F-fördelningen är 2 och 12). Eftersom testvariabelns värde 21.2 har passerat detta kan nollhypotesen förkastas. Samma slutsats får man genom att konstatera att p-värdet < 0.05 . Man har kunnat påvisa en skillnad mellan väntevärdena för kloroplastytan för de olika ozonhalterna.