

## Tentamen i matematisk statistik för BI2 den 16 januari 2009

**Uppgift 1:** Ett graviditetstest att använda i hemmet är inte helt tillförlitligt. Ett speciellt test visar positivt resultat för kvinnor, som inte är gravida, i 5% av fallen. Samma test visar negativt resultat i 1% av de fall då kvinnorna har varit gravida. Man räknar med att 12 av 100 kvinnor, som använder testet, får ett positivt resultat.

- a) Beräkna sannolikheten att en kvinna som använder testet är gravid.
- b) Anta att testet används av 100 slumpmässigt utvalda kvinnor. Beräkna ett 95%-igt konfidensintervall för antal kvinnor bland de 100 som är gravida.

(8 poäng)

**Uppgift 2:** Ett rouletthjul har sektorer numrerade 00, 0, 1, 2, ..., 36. Anta att de olika numren får lika stort utrymme på rouletthjulet. Du inte kan vinna någonting genom att satsa på siffrorna 00 och 0. Om du däremot satsar på någon av siffrorna 1 – 36 kan du - förutom din insats - dessutom få 35 gånger din insats. Det betyder att om du satsar 5 kronor och vinner så får du  $5 \times 36 = 180$  kronor. Din vinst blir därmed  $5 \times 35 = 175$  kronor. Anta att du satsar 100 kronor på en av siffrorna i en omgång av spelet.

- a) Vad är din förväntade förlust i detta spel?
- b) Vad blir motsvarande varians?

(6 poäng)

**Uppgift 3:** Vid en kvalitetskontroll har man ett kolli med 20 reservdelar. Ur kollit tar man ett slumpmässigt urval på 5 delar. Anta att hela kollit innehåller 3 defekta delar (fast det vet ju inte de som genomför kontrollen). Beräkna sannolikheten att urvalet inte innehåller någon defekt reservdel.

(5 poäng)

**Uppgift 4:** 95% av alla studenter som har tillfrågats anser att det är viktigt för kvaliteten på deras utbildning att studenternas åsikter tas tillvara genom kursutvärderingar. Anta att man väljer ut 15 studenter slumpmässigt. Vad är sannolikheten att högst 3 av dem har åsikten att det inte är viktigt för utbildningens kvalitet att genomföra kursutvärderingar?

(6 poäng)

**Uppgift 5:** Anta att antal bilar som kör in på en bensinstation är Poissonfördelat med en genomsnittlig ankomstfrekvens på 2 bilar på 10 minuter. En nyanställd person räknar antal bilar som anländer en viss timma.

- a) Vad är sannolikheten att det kommer minst 3 bilar till bensinstationen under denna timma?
- b) Anta att en bil just har kört in på bensinstationen. Hur lång tid kan man förvänta sig att det tar tills nästa bil kommer?

(6 poäng)

**Uppgift 6:** Anta att  $\xi$  är en kontinuerlig stokastisk variabel med följande frekvensfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & \text{för } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

- a) Bestäm konstanten C.
- b) Bestäm fördelningsfunktionen.
- c) Beräkna  $P(0.5 < \xi < 1.5)$ .

(6 poäng)

**Uppgift 7:** Vid ett bankkontor är två av kassorna bemannade. Vid öppningsdags går tre personer A, B och C in samtidigt. A och B går direkt fram till var sin kassa medan C väntar på sin tur tills antingen A eller B lämnar banken. Anta att betjäningstiderna för A, B och C är oberoende normalfördelade med  $\mu = 6$  min och  $\sigma = 2$  min. Vad är sannolikheten att A fortfarande är kvar vid sin kassa efter att de andra två har lämnat banken?

(6 poäng)

**Uppgift 8:** Anta att vikten av en viss sorts byggsten är normalfördelad med  $\mu = 5$  kg och  $\sigma = 0.5$  kg. På en släpkärra har man lastat 100 sådana stenar. Släpkärran klarar en last på 500 kg.

- a) Vad är sannolikheten att man får överlast om man lastar 100 stenar på kärran?
- b) Hur många stenar kan man lasta på kärran för att risken för överlast skall bli större än 0.90?

(7 poäng)

## Lösningar till tentamen i matematisk statistik för BI2 16/1-09

**Uppgift 1:** G = Gravid P = Positiv  $P(P) = 0.12$

$$P(P^c | G) = 0.01 \Rightarrow P(P | G) = 0.99$$

$$P(P | G^c) = 0.05$$

a) Värdena skrivs in i en 4-fältstabell

|                | P               | P <sup>c</sup> |     |
|----------------|-----------------|----------------|-----|
| G              | $P(P \cap G)$   |                | x   |
| G <sup>c</sup> | $P(P \cap G^c)$ |                | 1-x |
|                | 0.12            | 0.88           | 1   |

x-värdet beräknas med sambandet

$$0.12 = P(P) = P(P \cap G) + P(P \cap G^c) = P(P|G) \cdot P(G) + P(P|G^c) \cdot P(G^c) =$$

$$= 0.99x + 0.05(1 - x) \Rightarrow 0.94x = 0.07 \Rightarrow x \frac{0.07}{0.94} \approx 0.074$$

b) Ett 95%-igt konfidensintervall

$$n\hat{p} \pm 1.96 \sqrt{np(1-p)}$$

$$100 \cdot 0.074 \pm 1.96 \sqrt{100 \cdot 0.074(1-0.074)}$$

$$7.4 \pm 5.13$$

**Uppgift 2:**  $\xi$  = vinst på ett spel när man satsar 100 kr

| $\xi = x$ | $P(\xi = x)$    |
|-----------|-----------------|
| -100      | $\frac{37}{38}$ |
| 3500      | $\frac{1}{38}$  |

$$a) E(\xi) = \sum_{\Omega} x \cdot P(\xi = x) = -100 \cdot \frac{37}{38} + 3500 \cdot \frac{1}{38} = -\frac{200}{38} \approx -5.26$$

Förväntad förlust är 5.26 kr

$$b) \text{Var}(\xi) = \sum_{\Omega} x^2 \cdot P(\xi = x) - [E(\xi)]^2 = (-100)^2 \cdot \frac{37}{38} + (3500)^2 \cdot \frac{1}{38} - \left(-\frac{200}{38}\right)^2 \approx 322077.56$$

**Uppgift 3:** N = 20 reservdelar n = 5 reservdelar Np = 3 defekta reservdelar

$\xi$  = antal defekta reservdelar i urvalet

$$P(\xi = 0) = \frac{\binom{3}{0} \binom{17}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{1 \cdot \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{20 \cdot 19 \cdot 18} \approx 0.399$$

**Uppgift 4:**

P(en student tycker att det är viktigt att ta tillvara studenternas åsikter) = 0.95

$\xi$  = antal studenter som inte tycker det är viktigt.  $\xi$  är Bin(n, p) = Bin(15, 0.05)

$$P(\xi \geq 3) = 1 - P(\xi \leq 2) = 1 - [P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2)] =$$

$$= 1 - \binom{15}{0} 0.05^0 \cdot 0.95^{15} - \binom{15}{1} 0.05^1 \cdot 0.95^{14} - \binom{15}{2} 0.05^2 \cdot 0.95^{13} \approx 0.9945$$

**Uppgift 5:**  $\xi$  = antal bilar  $\xi$  = Po( $\lambda$  = 2 bilar/10 min)

a) Räkna om  $\lambda$  till antal bilar/ 60 minuter.  $\lambda$  = 12 bil/ 60 min

$$P(\xi \geq 3) = 1 - P(\xi \leq 2) = 1 - e^{-12} \cdot \left( \frac{12^0}{0!} + \frac{12^1}{1!} + \frac{12^2}{2!} \right) \approx 1 - 0.0005 = 0.9995$$

b)  $\eta$  = tiden mellan två bilar  $\eta$  = Exp( $\lambda$  = 2 bilar/10 min)

$$E(\eta) = \frac{1}{\lambda} = \frac{10 \text{ minuter}}{2 \text{ bilar}} = \frac{5 \text{ min}}{\text{bil}} = 5 \text{ min}$$

**Uppgift 6:**

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow 2C \int_0^2 (2x - x^2) dx = 2C \left[ x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 2C \left( 4 - \frac{8}{3} \right) = \frac{8C}{3} = 1$$

$$C = \frac{3}{8}$$

Fortsättning uppgift 6 på nästa sida

### Fortsättning uppgift 6

b)  $x \leq 0$  :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

$0 < x < 2$  :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \frac{3}{4} \int_0^x (2t - t^2) dt = \frac{3}{4} \left[ t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^x = \frac{3}{4} \left( x^2 - \frac{x^3}{3} \right)$$

$2 \leq x$  :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \frac{3}{4} \int_0^2 (2t - t^2) dt + \int_2^x 0 dt = \\ &= 0 + \frac{3}{4} \left[ t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^2 + 0 = \frac{3}{4} \left( 2^2 - \frac{2^3}{3} \right) = 1 \end{aligned}$$

Fördelningsfunktionen:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x \leq 0 \\ \frac{3}{4} \left( x^2 - \frac{x^3}{3} \right) & \text{för } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{för } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(0.5 < \xi < 1.5) &= P(\xi < 1.5) - P(\xi < 0.5) = \\ &= \frac{3}{4} \left( 1.5^2 - \frac{1.5^3}{3} \right) - \frac{3}{4} \left( 0.5^2 - \frac{0.5^3}{3} \right) = 0.6875 \end{aligned}$$

### **Uppgift 7:**

$\xi$  = servicetiden för A       $\eta$  = servicetiden för B       $\zeta$  = servicetiden för C

$\xi = N(6, 2)$        $\eta = N(6, 2)$        $\zeta = N(6, 2)$

Vi vill alltså beräkna  $P(\xi > \eta + \zeta) = P(\xi - \eta - \zeta > 0)$

Vi bildar därför variabeln  $v = \xi - \eta - \zeta$

$$E(v) = E(\xi) - E(\eta) - E(\zeta) = 6 - 6 - 6 = -6$$

$$\text{Var}(v) = \text{Var}(\xi) + \text{Var}(\eta) + \text{Var}(\zeta) = 2^2 + 2^2 + 2^2 = 12$$

Alltså gäller att  $v = N(-6, \sqrt{12})$

$$\begin{aligned} P(\xi - \eta - \zeta > 0) &= P(v > 0) = 1 - P(v < 0) = 1 - P\left(Z < \frac{0 - (-6)}{\sqrt{12}}\right) = \\ &= 1 - P(Z < 1.73) \approx \end{aligned}$$

**Uppgift 8:**  $\xi$  = vikten hos en viss sorts sten  $\xi = N(\mu, \sigma) = N(5, 0.5)$  kg

a)  $\eta$  = vikten hos 100 stenar  $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{100}$

$$E(\eta) = E(\xi_1) + E(\xi_2) + \dots + E(\xi_{100}) = 100 \cdot 5 = 500 \text{ kg}$$

$$\text{Var}(\eta) = \text{Var}(\xi_1) + \dots + \text{Var}(\xi_{100}) = 100 \cdot 0.5^2 = 25 \text{ kg}^2$$

Eftersom normalfördelningen är symmetrisk kring sitt väntevärde så gäller att  
 $P(\eta > 500) = P(\eta > E(\eta)) = 0.5$

b) Anta att man behöver  $n$  stenar

$$v = \text{vikten hos } n \text{ stenar} \quad v = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

$$E(v) = E(\xi_1) + E(\xi_2) + \dots + E(\xi_n) = n \cdot 5 \text{ kg}$$

$$\text{Var}(v) = \text{Var}(\xi_1) + \dots + \text{Var}(\xi_n) = n \cdot 0.5^2 \text{ kg}^2$$

$$P(v > 500) > 0.90 \Leftrightarrow P(v < 500) < 0.10$$

Lös först problemet för  $P(v < 500) = 0.10$

$$P(v < 500) = P\left(Z < \frac{500 - n \cdot 5}{\sqrt{n} \cdot 0.5}\right) = 0.10$$

$$\text{Tabellen ger att } P(Z < 1.28) = 0.90 \Leftrightarrow P(Z < -1.28) = 0.10$$

Alltså gäller att

$$\frac{500 - n \cdot 5}{\sqrt{n} \cdot 0.5} = -1.28 \Leftrightarrow 500 - 5n = -1.28 \cdot 0.5 \cdot \sqrt{n}$$

$$\Leftrightarrow n - 0.128 \cdot \sqrt{n} - 100 = 0$$

Sätt  $t = \sqrt{n}$  och lös andragradsekvationen  $t^2 - 0.128t - 100 = 0$  (OBS!  $t \geq 0$ )

$$t = \frac{0.128}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0.128}{2}\right)^2 + 100} \Leftrightarrow t = 0.064 \pm \sqrt{(0.064)^2 + 100}$$

$$t_1 \approx 0.064 + 10.0002 = 10.0642 \quad \text{och} \quad (t_2 \approx 0.064 - 10.0002 = -9.9362)$$

$$n \approx (t_1)^2 = 101.288$$

Eftersom  $P(v < 500) < 0.10$  så avrundas svaret uppåt, d.v.s.  $n \geq 102$