TENTAMEN: Statistik och sannolikhetslära (LMA120), 2010-01-15

Kortfattade lösningar:

1) Låt ξ vara antalet felaktiga skruvar i en förpackning. Då är ξ binomialfördelat med parametrar 10 och 0.01. Då är den önskade andelen $P(\xi > 1) = 1-P(\xi \leq 1) = 1-P(\xi = 0)-P(\xi = 1) = \binom{10}{0}(.01)^0(.99)^{10} - \binom{10}{1}(.01)^1(.99)^9 = .004.$

2) Låt X = antalet olika poängtal vi får. Vi har

   a) $P(X = 3) = \frac{6\cdot5\cdot4}{6\cdot6\cdot6} = \frac{20}{36}$,
   b) $P(X = 1) = \frac{6\cdot1\cdot1}{6\cdot6\cdot6} = \frac{1}{36}$
   c) $P(X = 2) = 1 - P(X = 1) - P(X = 3) = \frac{15}{36}$.

3) Låt D vara händelsen att den testade personen har sjukdomen och E händelsen att testresultatet är positivt. Den önskade sannolikheten är $P(D|E) = P(D \cap E)/P(E) = P(E|D)P(D)/(P(E|D)P(D)+P(E|D^C)P(D^C)) = .95 \cdot .005/(.95 \cdot .005 + .01 \cdot .995) = .323.$

4) Låt ξ vara längden av samtalet.

   a) $P(\xi > 10) = 1 - F(10) = e^{-1} = .368$;
   b) $P(10 < \xi < 20) = F(20) - F(10) = e^{-1} - e^{-2} = .233$, där F är fördelningsfunktionen för ξ.

5) a) $f(x)$ är en täthetsfunktion bara om $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^2 c(2-x)\,dx = 1$. Då måste $c = \frac{1}{2}$;
   b) Väntevärdet är $\mathbf{E}[\xi] = \int_0^2 (x - \frac{x^2}{2})dx = \frac{2}{3}$. $\mathbf{E}[\xi^2] = \int_0^2 (x^2 - \frac{x^3}{2})dx = \frac{2}{3}$ och då blir variansen $\mathbf{E}[\xi^2] - (\mathbf{E}[\xi])^2 = \frac{2}{9}$.
   c) $P(0 < X \leq 1) = \int_0^1 (1 - \frac{1}{2}x)\,dx = \frac{3}{4}$.

6) Låt X vara densiteten. Då är $X \sim N(0.0046, 9.6 \cdot 10^{-8})$.

   a) $P(0.004 < X < 0.005) = P(\frac{0.004-0.0046}{0.0003} < \frac{X-0.00046}{0.0003} < \frac{0.005-0.0046}{0.0003}) = P(-2 < Z < 1.33) = \Phi(1.33) - \Phi(-2) = 0.8854$, där $Z \sim N(0,1)$ och Φ är fördelningsfunktionen av den standardiserade normalfördelningen.
   b) $P(X > x_0) = 0.05$ och man borde hitta x_0.
   $P(X \leq x_0) = P(\frac{X-0.0046}{0.0003} \leq \frac{x_0-0.0046}{0.0003}) = \Phi(\frac{x_0-0.0046}{0.0003}) = 0.95 = \Phi(1.645)$ och $x_0 = 0.0051$.

7) Antag att ξ är antalet registrerade studenter. Då är $P(\xi \geq 120) = P(\frac{\xi - 100}{\sqrt{100}} \geq \frac{120-100}{\sqrt{100}}) \approx 1 - \Phi(2.00) = .0288$ enligt centrala gränsvärdessatsen.

8) a) Konfidensintervallet är $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\alpha/2}\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}$, där $S_p^2 = ((n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2)/(n_1 + n_2 - 2)$. Nu är $\bar{x}_1 = 6150$, $\bar{x}_2 = 5250$, $\alpha = 0.01$, $t_{0.005}^{(28)} = 2.763$, $n_1 = 16$, $n_2 = 14$ och $s_p^2 = 6040.179$, och ett 99% konfidensintervall blir $900 \pm 79 = [821, 979]$ och det verkar som det är bra att använda kedjor (0 är inte på intervallet).

b) $X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma)$ och $X_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma)$ och att de två stickproven är oberoende.