

Kortfattade lösningar:

- 1) a) Två händelser är disjunkta om de inte kan inträffa samtidigt, dvs. att sannolikheten av snitthändelsen är noll. Nu är  $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0.12 \neq 0$  och då är  $A$  och  $B$  inte disjunkta.  
b)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.78$ .  
c)  $P(A \cap B) = 0.12 \neq 0.4 \cdot 0.5 = P(A)P(B)$ , dvs. att  $A$  och  $B$  inte är oberoende.
- 2) Låt  $F$  = det valda ordet är finskt,  $F_1$  = det valda ordet är SCHMERZ,  $F_2$  = det valda ordet är KULUMISURIA,  $F_3$  = det valda ordet är RIIUUYÖAIE och  $V$  = den valda bokstaven är vokal. Då är  
 $P(\text{ordet är finskt} | \text{bokstaven är vokal}) = P(F|V) = P(F_2 \cup F_3|V) = 1 - P(F_1|V) = 1 - \frac{P(V|F_1)P(F_1)}{\sum_{i=1}^3 P(V|F_i)P(F_i)} = 1 - \frac{\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{11} \cdot \frac{1}{3} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{3}} = 1 - 0.0899 = 0.91$ .
- 3) Låt  $\xi_i$  vara förlusten av den  $i$ . kunden. Då är  $\mathbf{E}[\xi_i] = \frac{1}{5}(-2-1+0+1+2) = 0$  och  $\mathbf{E}[\xi_i^2] = \frac{1}{5}(4+1+0+1+4) = 2$  vilket ger att  $\text{Var}(\xi_i) = 2$ . Den totala förlusten är  $\xi = \sum_{i=1}^{10000} \xi_i$  och då är  $\mathbf{E}[\xi] = 0$  och  $\text{Var}(\xi) = 10000 \cdot 2$ . Centrala gränsvärdeessatsen ger att  $P(\xi > 200) = P(\frac{\xi-0}{100\sqrt{2}} > \frac{200}{100\sqrt{2}}) \approx P(Z > \sqrt{2}) = 1 - \Phi(1.41) = 0.0793$ , där  $Z \sim N(0, 1)$  och  $\Phi$  är fördelningsfunktionen av den standardiserade normalfördelningen.
- 4)  $\nu \sim N(1.95, 0.05)$ .
  - a)  $P(1.8 < \nu < 2.0) = P(\frac{1.8-1.95}{0.05} < \frac{\nu-1.95}{0.05} < \frac{2.0-1.95}{0.05}) = P(-3 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-3) = \Phi(1) - (1 - \Phi(3)) = 0.84$ , där  $Z \sim N(0, 1)$  och  $\Phi$  är fördelningsfunktionen av den standardiserade normalfördelningen.
  - b) Låt  $\xi$  vara antalet kuvert som väger mellan 1.8g och 2g. Då är  $\xi$  binomialfördelat med parametrar 100 och 0.84 och  
 $P(\xi \geq 2) = 1 - P(\xi < 2) = 1 - P(\xi \leq 1) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) \approx 1$
  - c)  $\mathbf{E}[\xi] = 100 \cdot 0.84 = 84$  och  $\text{Var}(\xi) = 100 \cdot 0.84 \cdot 0.16 = 13.44$ .

- 5) a)  $\bar{x} \pm t_{0.025}^{71} \cdot s/\sqrt{n} = 116 \pm 18.86$ .  
 b) Längre därför att konfidsgraden är högre.  
 c) Vanligen skulle man anta att observationerna kommer från en normalfördelning men nu har man så många observationer (72) att enligt den centrala gränsvärdessatsen är medelvärde approximativt normalfördelat så att man inte behöver anta någonting om populationen.

6) a)  $\frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13} = 0.091$   
 b)  $\frac{10 \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{9}{6} \cdot 2^6}{\binom{20}{8}} = 0.427$

- 7) a) Låt  $\xi$  vara antalet jordbävningar under en två veckors period i västra USA. Då är  $\xi \sim Poi(4)$  och

$$\begin{aligned} P(\xi \geq 3) &= 1 - P(\xi \leq 2) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) - P(\xi = 2) \\ &= 1 - \frac{4^0}{0!}e^{-4} - \frac{4^1}{1!}e^{-4} - \frac{4^2}{2!}e^{-4} = 0.762 \end{aligned} \quad (1)$$

- b) Låt  $\nu$  vara antalet jordbävningar under en två veckors period i östra USA. Nu är  $\nu \sim Poi(1)$  och  $\xi + \nu \sim Poi(5)$ . Man får att

$$P(\xi + \nu \leq 1) = P(\xi + \nu = 0) + P(\xi + \nu = 1) = \frac{5^0}{0!}e^{-5} + \frac{5^1}{1!}e^{-5} = 0.040$$

- 8) a)  $\int_0^1 f(x) dx = 1$  och då är  $c = \frac{1}{4}$ .  
 b)  $P(X < \frac{3}{4}) = \int_0^{\frac{1}{2}} (3x^3 + \frac{1}{4}) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{3}{2} dx = \frac{5}{8}$ .  
 c)  $E[X] = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x(3x^2 + \frac{1}{4}) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3}{2} x dx = \frac{41}{64} = 0.64$ .