

TENTAMEN: Statistik och sannolikhetslära (LMA120), 2009-08-26

Kortfattade lösningar:

- 1) a) $\xi \sim \text{Bin}(60, \frac{1}{6})$, $\mathbf{E}\xi = 60 \cdot \frac{1}{6} = 10$
b) $\nu \sim \text{Bin}(60, \frac{1}{3})$, $\mathbf{Var}(\nu) = 60 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{40}{3}$.
- 2) Antalet kombinationer av 3 bland 10 element är $\binom{10}{3}$. Antalet av dessa som är gynnsamma är 8 (kombinationer $\{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \dots, \{8,9,10\}$). Sannolikheten blir därför $= 8 / \binom{10}{3} = \frac{1}{15}$.
- 3) a) $P(\xi < \frac{3}{4}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{3}{2} dx = \frac{5}{8}$
b) $\mathbf{E}\xi = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3}{2} x dx = \frac{5}{8}$.
- 4) Centrala gränsvärdessatsen säger att för oberoende stokastiska variabler $\xi_1, \dots, \xi_n$ med samma fördelning, $\mathbf{E}\xi_i = m$ och $\mathbf{Var}(\xi_i) = \sigma^2$, gäller om n är stort att $\sum_{i=1}^n \xi_i \stackrel{\text{appr.}}{\sim} N(n \cdot m, \sigma\sqrt{n})$. Nu är $n = 20$, $\mathbf{E}\xi_i = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ och $\mathbf{Var}(\xi_i) = \mathbf{E}\xi_i^2 - (\mathbf{E}\xi_i)^2 = \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Då är $S \stackrel{\text{appr.}}{\sim} N(10, \sqrt{\frac{5}{3}})$.
- 5) a) Hypergeometrisk fördelning med $N = 10$, $n = 3$ och $Np = 4$
b) ξ är antalet gula bilar

$$P(\xi \geq 2) = 1 - P(\xi \leq 1) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) = \frac{1}{3}$$

$$\text{c) } \frac{\binom{4}{1} \binom{5}{2}}{\binom{10}{1} \binom{9}{2}} = \frac{1}{9}$$

$$\text{d) } \frac{\binom{1}{0} \binom{9}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{10}$$

$$\text{e) } \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{1}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}$$

- 6) Låt A = en slumpmässigt vald person är knarkare och B = testet är positivt. Vi skulle vilja hitta $P(A|B)$. Nu är $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\text{icke } A)P(\text{icke } A) = 0.99 \cdot 0.01 + 0.01 \cdot 0.99 = 2 \cdot 0.01 \cdot 0.99$ och $P(A \cap B) = 0.01 \cdot 0.99$. Då är $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}$.
- 7) Låt μ vara väntevärdet och σ^2 variansen av ξ . $P(\xi \leq 0) = P(\frac{\xi - \mu}{\sigma} \leq -\frac{\mu}{\sigma}) = \Phi(-\frac{\mu}{\sigma}) = 1 - \Phi(\frac{\mu}{\sigma}) = 0.1587$. Då är $\Phi(\frac{\mu}{\sigma}) = 1 - 0.1587 = 0.8413$ och $\frac{\mu}{\sigma} = 1$. $P(\xi \leq 3) = P(\frac{\xi - \mu}{\sigma} \leq \frac{3 - \mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{3 - \mu}{\sigma}) = 0.6915$ och då är $\frac{3 - \mu}{\sigma} = 0.5$. (Φ är fördelningsfunktionen av den standardiserade normalfördelningen.) Genom att lösa paret av de två ekvationerna får man att $\mu = 2$ och $\sigma^2 = 4$ ($\sigma = 2$).
- 8) Låt ξ_1 vara korrosionshastigheten av kokillhärdat gjutjärn med 0.1% krominnehåll och ξ_2 korrosionshastigheten med 0.2% krominnehåll. Man antar att ξ_1 och ξ_2 är normalfördelade med okända varianser $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.
- Testa hypotesen $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ mot $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$. Man får att $S_p^2 = 0.0935$, $T = (\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2)/S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sim T_{23}$ och att T får ett värde 1.356. Nu är $t = 1.356 < 1.714 = t_{0.05}$ så att H_0 kan inte förkastas på signifikansnivån 0.1 (eller mindre). Dvs. att krominnehållet verkar inte påverka korrosionshastigheten. (Du kan också räkna p -värdet om du vill.)
 - $\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2 \pm t_{0.005} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 0.165 \pm 0.355$. Därför att $0 \in [-0.17, 0.5]$ kan man säga att det finns ingen skillnad mellan de olika krominnehållen enligt 99% konfidensintervallet.
 - Man drar samma slutsats i a) och b): ingen skillnad mellan korrosionshastigheterna beroende på krominnehållet.