Logaritmer och exponentiell regression.

# Logaritmer

Tiologaritmer

Tiologaritmen för ett tal *a* är det tal 10 ska upphöjas till för att man ska få *a*. Tiologaritmen kallas ofta bara för logaritmen och skrivs log. Exempelvis är

Observera att *a*, det tal man ska ta logaritmen av, måste vara positivt eftersom är positivt för alla reella tal *x.* Vi kan skriva

Om *a* är en jämn tiopotens är det lätt att hitta logaritmen för *a*. Vi har t.ex. att eftersom . I allmänhet är inget heltal.

Exempel

Beräkna .

Eftersom så vet vi omedelbart att är mellan 1 och 2. Om man använder räknaren så får man att . Alltså är .

Uppgifter

3. =

Räkneregler

Viktiga räkneregler för logaritmer är

Andra baser än 10

Det finns logaritmer för andra baser än 10. Generellt är *b*-logaritmen för *a*, det tal vi måste upphöja basen *b* till för att få *a*. Alltså

Om man skall vara noggrann skrivs alltså tiologaritmen för *a* som . Räknereglerna ovan gäller för vilken bas man än väljer. Förutom 10 är den andra bas som är vanligast förekommande talet *e* (). Logaritmer som har basen *e* kallas för naturliga logaritmer och skrivs oftast[[1]](#footnote-2) som ln.

Exempel på ekvationslösning med hjälp av logaritmer

Jag sätter in 400 kr på banken mot 7 % ränta. Hur länge skall pengarna stå inne för att de skall ha vuxit till 1000 kr?

Om y är kapital efter x år får vi sambandet   
   
Vi kan naturligtvis pröva oss fram till att och så att *x* bör ligga mellan 13 och 14. Vi kan också lösa ekvationen eller (dela båda sidor med 400) . Börja med att logaritmera[[2]](#footnote-3) båda sidor

och använd sedan den tredje räkneregeln ovan

Nu kan vi lösa ut *x*,

Pengarna skall alltså stå inne i ungefär 13,5 år för att beloppet ska växa från 400 kr till 1000 kr.

# Exponentiell regression

Antag att vi har *n* stycken parvisa observationer och att observationerna följer ett exponentiellt samband,

Om man logaritmerar båda sidor så får man

Om nu så får vi

Alltså kan vi använda minsta kvadratmetoden för en rät linje men där alla *y*-värden har logaritmerats. Vi skattar och . För att gå tillbaka till den ursprungliga modellen tar vi och

*Exempel*

I en stad var befolkningen vart fjärde år mellan 1940 och 1976;

1. Låt oss gissa att befolkningstillväxten är linjär och använda minsta kvadratmetoden för att skatta koefficienterna i , där *y* är befolkningsmängd och *x* antal år efter 1940. Kvadratsummorna är:

Nu blir koefficienterna

Vi kan beräkna korrelationskoefficienten också:

Korrelationskoefficienten är alltså relativt stor, men om vi visar data i ett spridningsdiagram så ser vi att sambandet mellan befolkning och år inte alls är speciellt linjärt. En residualplot visar samma sak.

expon_bild1.tif expon_bild1.tif

1. Om vi tittar på spridningsdiagrammet till vänster så ser det ut som om en exponentiell modell kanske passar, alltså , där *y* är befolkningsmängd och *x* är antal år efter 1940. Vi logaritmerar och får . Vi kallar nu och gör en linjär anpassning av data till . Våra *z*-värden får vi genom att logaritmera befolkningsmängderna ovan, d.v.s. . En plot av dessa loggade värden mot *x*-värdena visar på ett linjärt samband.

expon_bild3.tif

De nya kvadratsummor som behövs är

Koefficienterna blir

Korrelationskoefficienten blir:

Lutningskoefficienten kan tolkas som att logaritmen för befolkningsmängden i genomsnitt ökar med 0,041 för varje år. Den andra koefficientens värde 3,477 är logaritmen för befolkningsmängden år 1940.

För att gå tillbaka till den ursprungliga modellen med icke-transformerade *y*-värden, så beräknar vi och . Alltså är den ursprungliga modellen . Befolkningsmängden år 1940 () var alltså ungefär 3001 och den genomsnittliga årliga tillväxtfaktorn var 1,10. Låt oss plotta data och detta samband.

expon_bild4.tif

Vi kan se att modellen passar bra!

Detta exempel visar, förutom ett exponentiellt samband, att även om korrelationskoefficienten är relativt stor som under den första ansatsen så är det inte alls säkert att modellen är bra.

Andra exempel på ickelinjära samband och minsta kvadratmetoden

I alla exempel nedan kan man anpassa *y* och *z* till en rät linje.

* Exempel 1. Vi har observationer som följer sambandet . Låt .
* Exempel 2. Observationerna följer sambandet . Låt .
* Exempel 3. Observationerna följer sambandet . Låt .

Det går naturligtvis att hitta på fler exempel. Problemet är att avgöra vilket samband som data egentligen följer. Tolkningar av koefficienterna *a* och *b* blir lite krångligare.

1. Ibland är det den naturliga logaritmen som skrivs log, så kontrollera t.ex. vilken beteckning din räknare har. [↑](#footnote-ref-2)
2. Det går bra att använda vilken bas som helst för logaritmen, bara man använder samma hela tiden. [↑](#footnote-ref-3)