Sannolikhetslära

19 februari 2009

Vad är en sannolikhet?

I vardagen:

- Vad är sannolikheten att vinna om jag köper en lott?
- Borde jag ta paraply med mig till jobbet idag? Vad är sannolikheten att det kommer regna?
- Ska jag teckna en extra försäkring på min nya mobil? Vad är sannolikheten att den går sönder (och garantin inte gäller)?

Sannolikheter är ett sätt att uttrycka osäkerhet. Flera tolkningar av sannolikheter finns. Den vanligaste är i termer av relativa frekvenser.

Exempel. Kasta tärning. Hur många sexor förväntar man sig om en tärning kastas 10 gånger? 100 gånger?

Vi fick följande resultat när 9 personer kastade en tärning vardera 10 gånger: 1, 3, 1, 2, 2, 5, 4, 0, 2. Alla vet att det är 1 chans på 6 att få en sexa vid tärningskast. Alltså borde man få 1-2 sexor om man kastar 10 gånger. Vi kan se att resultatet variera ganska mycket; allt mellan 0 och 5 sexor på 10 kast. Totalt kastades 90 kast och $1+3+1+2+2+5+4+0+2 = 20$ blev sexor. Alltså blev andelen sexor $20/90 = 0{,}22$.

Vad händer om vi kastar många fler gånger? Med hjälp av en dator kastades tärningen 1000 gånger och antalet sexor blev 140, alltså 14 %. Försöket gjordes om med 10000 kast och då blev antalet sexor 1726, alltså 17,3 %. Detta är ganska nära vad vi förväntar oss (1/6=16,7 %). □

En tolkning av sannolikheter är att sannolikheten för ett visst utfall är andelen gånger som utfallet observeras om ett stort antal försök utförs. I själva verket tänker vi oss att antal försök går mot oändligheten. Andra tolkningar kan vara mer subjektiva och personliga. Vad tror du sannolikheten är att Kalmar vinner allsvenskan i år igen?

Exempel. Ett tärningskast har sannolikhet $1/6$ att bli en sexa. Andelen gånger man slår sexor i en lång rad försök är $1/6$. □

Exempel. En metereolog säger att sannolikheten att det regnar idag är 70 %. Det betyder att bland ett stort antal dagar med samma atmosfäriska förhållanden som idag så regnade det 70 % av gångerna. □

Oberoende

Det är en vanlig missuppfattning om slumpfenomen att om något inte har inträffat på länge så måste det inträffa snart. Om det har blivit svart sju gånger i rad på roulettehjulet så måste det väl bli rött snart? Om man snurrar på hjulet en gång är sannolikheten för svart $1/2$ (eller egentligen $17/37$). Det finns ingen anledning till att denna sannolikhet ska ändra sig bara för att det har råkat bli svart sju gånger i rad. Skulle roulettekulan ha ett minne och komma ihåg att den hade stannat på svart sju gånger?

Om man gör ett fåtal försök, som våra tärningskast, så kan resultatet avvika från det vi förväntar oss, men det är en vanlig situation att nya försök inte har något med de gamla att göra. Försöken sägs i så fall vara **oberoende**.

Tärningskast är oberoende liksom roulette. Vilket kön barn nummer två i en familj har är oberoende av första barnets kön. Ett exempel på beroende är att om det regnar idag så är det troligt att det regnar även i morgon (vädersystem kommer in med regn flera dagar i följd).

Beräkning av sannolikheter

Utfallsrummet är mängden av alla möjliga utfall.

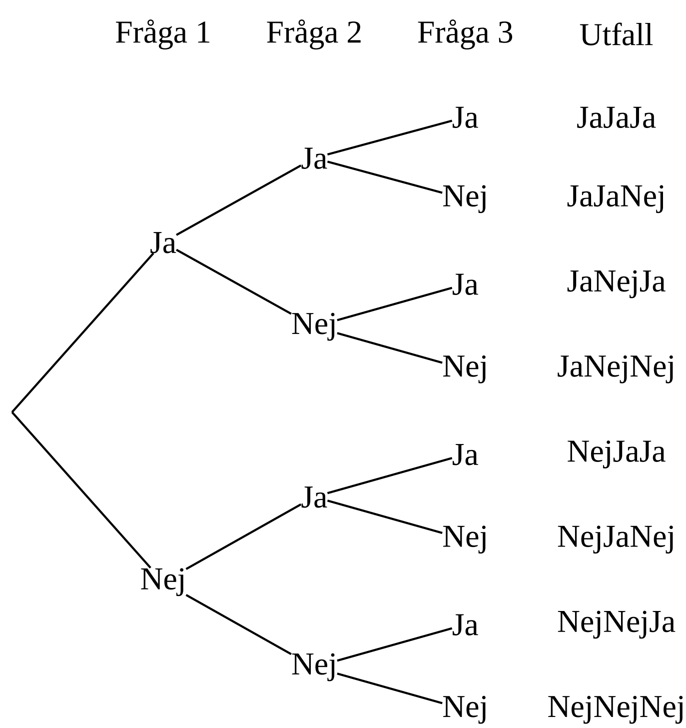
Exempel. Kasta tärning en gång. Utfallsrum $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. □

Exempel. Singla slant två gånger. Utfallsrum

$$\{\text{KronaKrona}, \text{KronaKlave}, \text{KlaveKrona}, \text{KlaveKlave}\}.$$

□

Exempel. En lärare ger sina elever tre ja/nej frågor. Som hjälp för att skriva upp alla utfall kan man göra ett träddiagram.



Varje utfall har en viss sannolikhet att inträffa. I de enkla exemplen ovan med tärningskast och slantsingling har alla utfall lika stor sannolikhet, men det behöver naturligtvis inte vara så. Det gäller att

- Sannolikheten för varje enskilt utfall är mellan 0 och 1.
- Sannolikheten för utfallsrummet är 1, d.v.s. summan av sannolikheterna för de enskilda utfallen är 1.

Ibland vill man gruppera flera utfall. En **händelse** är en delmängd av utfallsrummet.

Exempel. A=tärningen visar 4 eller mer vid ett kast=$\{2, 4, 6\}$. □

Sannolikheten för en händelse fås genom att addera sannolikheterna för utfallen.

Exempel. Sannolikheten för att en tärning visar 4 eller mer.

$$P(A) = P(\text{visar 4:a}) + P(\text{visar 5:a}) + P(\text{visar 6:a}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

När alla utfall är lika sannolika gäller

$$P(A) = \frac{\text{antal utfall i } A}{\text{antal utfall i utfallsrummet}}.$$

Exempel Trebarnsfamilj. Könen på barnen i en trebarnsfamilj. Låt f beteckan flicka och p pojke. Utfallsrum {fff, ffp, fpf, pff, fpp, pfp, ppf, ppp}. Det är lika sannolikt att få pojkar som flickor och därmed är alla utfall lika sannolika. Låt A = exakt en pojke ={ffp, fpf, pff}.

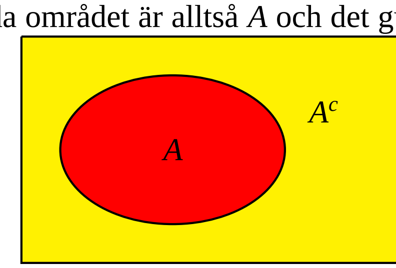
$$P(A) = \frac{\text{antal utfall i } A}{\text{antal utfall i utfallsrummet}} = \frac{3}{8}.$$

□

Komplementet till en händelse A är alla utfall i utfallsrummet som inte ingår i A. Komplementet skrivs A^c. Eftersom sannolikheten för utfallsrummet är 1 så är

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Ibland är det lättare att beräkna sannolikheten för komplementhändelsen än för den händelse som egentligen är av intresse. Ett sätt att åskådliggöra händelser är med hjälp av Venndiagram. Det röda området är alltså A och det gula A^c. Utfallsrummet är hela lådan.

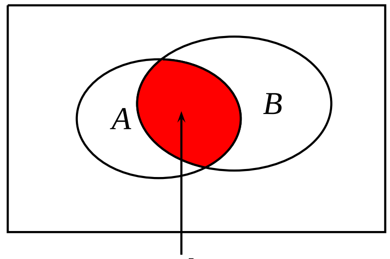


Exempel Trebarnsfamilj. Vad är sannolikheten att trebarnsfamiljen har minst en flicka?

$$P(\text{Minst en flicka}) = 1 - P(\text{Bara pojkar}) = 1 - P(\{ppp\}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \approx 0.875$$

□

Snittet mellan två händelser A och B är alla utfall som är både i A och i B. Snittet skrivs som A och B.

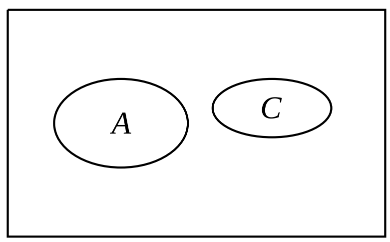


A och B

Exempel Trebarnsfamilj. Låt B = Barn två är en flicka = {fff, ffp, pff, pfp} och låt A = exakt en pojke, som förut. Då är A och B = {ffp, pff}. □

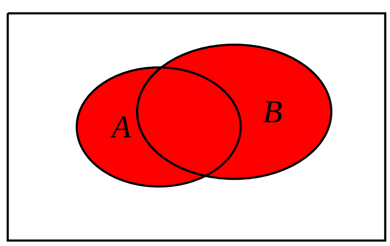
Två händelser är **disjunkta** om de inte har några gemensamma utfall.

Exempel Trebarnsfamilj. Låt C = bara pojkar och låt A = exakt en pojke, som förut. Då är A och C disjunkta.



□

Unionen av två händelser A och B är alla utfall som finns i A eller i B eller i båda. Skrivs A eller B. Observera att detta eller skiljer sig från hur vi använder eller i vanligt språkbruk.

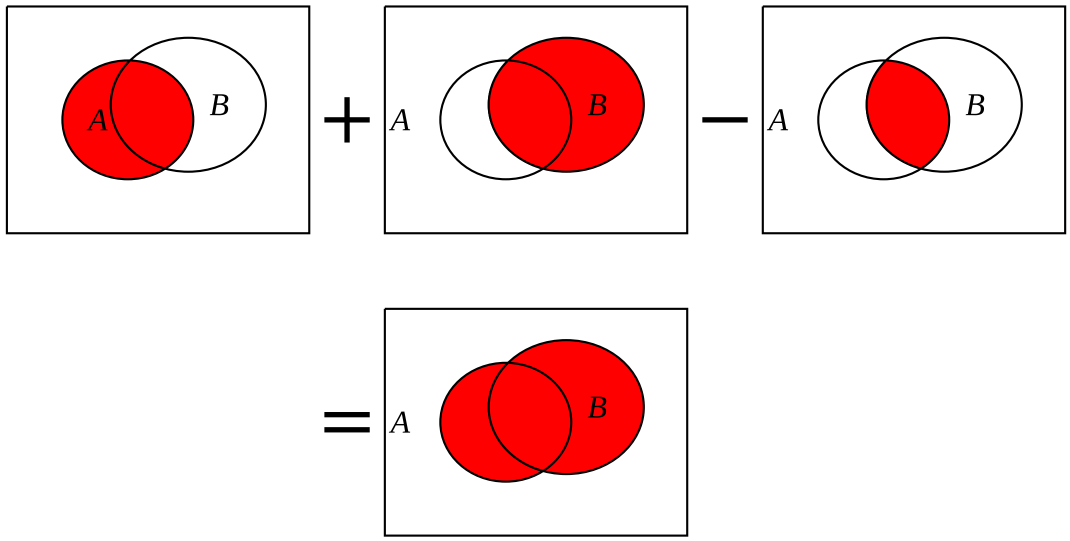


A eller B

Vad är sannolikheten för A eller B?

$$P(A \text{ eller } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ och } B).$$

Genom att titta på Venndiagram ser vi genast att skärningen mellan A och B räknas två gånger om man bara adderar sannolikheterna för de båda händelserna.



Om A och B är disjunkta är $P(A \text{ och } B) = 0$ och då är:

$$P(A \text{ eller } B) = P(A) + P(B).$$

Oberoende

För två oberoende händelser A och B gäller att

$$P(A \text{ och } B) = P(A) \cdot P(B).$$

Exempel. Kasta en tärning två gånger. Låt S_1 = första kastet är en sexa och S_2 = andra kastet är en sexa. Vi vet att $P(S_1) = P(S_2) = 1/6$. Sannolikheten att båda kasten visar en sexa är

$$P(S_1 \text{ och } S_2) = P(S_1) \cdot P(S_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

eftersom det första kastet inte har någon påverkan på vad det andra blir. Man kan naturligtvis också skriva upp alla utfall och sedan se att endast 1 av 36 ger två sexor. □

Exempel. Ett postorderföretag sänder varje år ut två kataloger, en på våren och en på hösten. För varje katalog som sänds till en kund noteras om kunden köpte något eller inte. Utfallsrummet är {jj, jn, nj, nn} där t.ex. jn betyder att kunden köpte ur vår katalogen (j=ja) men inte ur höstkatalogen (n=nej). Följande sannolikheter upskattades från en undersökning.

$$P(\text{jj}) = 0{,}30 \qquad P(\text{jn}) = 0{,}10 \qquad P(\text{nj}) = 0{,}05 \qquad P(\text{nn}) = 0{,}55$$

a) Låt V = kund köper från vårkatalogen och H = kund köper från höstkatalogen. Vad är $P(V)$ och $P(H)$?

   $V = \{\text{jj}, \text{jn}\}$

   $H = \{\text{jj}, \text{nj}\}$

$$P(V) = P(\text{jj}) + P(\text{jn}) = 0{,}30 + 0{,}10 = 0{,}40$$

$$P(H) = P(\text{jj}) + P(\text{nj}) = 0{,}30 + 0{,}05 = 0{,}35$$

b) Vad betyder V och H? Beräkna $P(V \text{ och } H)$.

V och H betyder att en kund löpt från både vår- och höstkatalogen. (V och H)= {jj}.

$$P(V \text{ och } H) = P(\text{jj}) = 0{,}30.$$

c) Är V och H oberoende händelser?

$P(V \text{ och } H) = 0{,}30$, men $P(V) \cdot P(H) = 0{,}40 \cdot 0{,}35 = 0{,}14$. Alltså är $P(V \text{ och } H)$ inte lika med $P(V) \cdot P(H)$ och därmed är händelserna inte oberoende.

□

Exempel. I en medicinsk studie fick 250 patienter som både hade klåda i ögonen och utslag en allergimedicin. För 90 av dem försvann klådan. För 135 gick utslagen bort. För 135 försvann både klåda och utslag. Vad är sannolikheten att medicinen gör någon nytta?

Låt A = klådan försvann och B = utslagen försvann. Då är (A eller B)= antingen försvinner klådan eller utslagen eller både och = medicinen gör nytta. Från uppgiften uppskattar vi

$$P(A) = \frac{90}{250} = 0{,}36 \quad P(B) = \frac{135}{250} = 0{,}54 \quad P(A \text{ och } B) = \frac{45}{250} = 0{,}18$$

Då blir

$$P(A \text{ eller } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ och } B) = 0{,}36 + 0{,}54 - 0{,}18 = 0{,}72.$$

□

Stokastiska variabler (slumpvariabler)

En stokastisk variabel är en numerisk mätning av ett slumpmässigt fenomen. Vi brukar beteckna stokastiska variabler med stora bokstäver, t.ex. X. Om vi pratar om möjliga värden på stokastiska variabler så brukar de betecknas med små bokstäver, t.ex. x. Exempelvis kan X vara antal krona vid tre slantsinglingar och $x = 2$ är ett av dess möjliga värden. Stokastiska variabler kan man dela in i diskreta och kontinuerliga. Vi börjar med de diskreta.

Diskreta stokastiska variabler

En diskret stokastisk variabel, X, kan anta vissa specifika värden, vanligtvis $0, 1, 2, \ldots$. Dess **frekvensfunktion**, $p(x)$ ger en sannolikhet för varje möjligt värde x.

- För varje värde på x är $p(x) = P(X = x)$ mellan 0 och 1.
- Summan av sannolikheterna för alla möjliga värden på x är 1. D.v.s.

$$\sum_{\text{alla } x} p(x) = 1.$$

Man kan, precis som för insamlade data, beräkna medelvärde och standardavvikelse för en stokastisk variabel. Medelvärdet brukar betecknas μ och i det diskreta fallet är

$$\mu = \sum_{\text{alla } x} x p(x).$$

Standardavvikelsen betecknas med σ, men vi bryr oss inte om att kunna räkna ut den.

Exempel. Låt X vara en slumpmässigt vald siffra mellan 0 och 9. Möjliga värden på X är då $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Om varje siffra har lika stor sannolikhet så är

$$p(0) = p(1) = p(2) = \ldots = p(9) = \frac{1}{10}.$$

□

Exempel. Ett försäkringsbolag säljer försäkringar till flygpassagerare för \$1. Om en passagerare dör i en flygkrasch betalar försäkringsbolaget ut \$100000 till förmånstagaren. En passagerare har ungefär en chans på miljonen att dö i en flygkrasch. Vi kan låta X vara beloppet som en förmånstagare får. Möjliga värden är 0 och 100000. Frekvensfunktionen ges av

$$p(100000) = \frac{1}{1000000} = 0{,}000001$$
$$p(0) = 1 - p(100000) = 0{,}999999.$$

Medelvärdet för X är

$$\mu = 0 \cdot p(0) + 100000 \cdot p(100000) = 100000 \cdot 0{,}000001 = 0{,}1.$$

Alltså tjänar en förmånstagare i genomsnitt \$0,1. Men den som köpte försäkringen betalade \$1, så försäkingsbolaget tjänar i genomsnitt \$0,9 dollar per kund! □

Binomialfördelningen

En vanlig situation är att observationer bara har två möjliga utfall.

- En person kan svara ja eller nej.
- Straffkast. Antingen sitter straffen eller inte.

Följande situation beskriver binomialfördelningen.

- Vart och ett av n försök har bara två möjliga utfall. Det utfall som är av intresse brukar kallas för ett lyckat försök. Det andra utfallet kallas misslyckat.
- Varje försök har samma sannolikhet, π, att lyckas. Sannolikheten att ett försök misslyckas är alltså $1 - \pi$.
- Försöken är oberoende.
- Antalet lyckade försök bland de n försöken sägs vara binomialfördelat.

Exempel. X = antal krona vid 5 kast av ett mynt. X är binomialfördelad med $n = 5$ och $\pi = 0{,}5$ (om det är ett normalt mynt). De möjliga värdena på X är 0, 1, 2, 3, 4 eller 5. □

Exempel. Erik påstår sig ha vissa paranormala förmågor. Ett försök utförs där en person i ett rum väljer ett av talen 1, 2, 3, 4, eller 5 på måfå och tänker på talet i en minut. I ett annat rum sitter Erik och talar om vilket tal han tror valdes. Försöket görs om tre gånger. Erik svarar rätt i två av fallen.

Om Erik inte har någon paranormal förmåga vad är då sannolikheten att han bara genom att gissa har rätt på två?

Låt X = antal korrekta gissningar på 3 försök. Om Erik bara gissar är sannolikheten $1/5 = 0{,}2$ att han får rätt på en av sifforna. Sannolikheten att han gissar fel är alltså 0,8. Låt nu R = gissa rätt i ett försök och F = gissa fel i ett försök. Möjliga utfall med sannolikheter ges i tabellen:

Försöks nr. 1	2	3	Sannolikhet
R	R	R	$0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}2^3$
R	R	F	$0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}2^2 \cdot 0{,}8$
R	F	R	$0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}2^2 \cdot 0{,}8$
F	R	R	$0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}2^2 \cdot 0{,}8$
R	F	F	$0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}2 \cdot 0{,}8^2$
F	R	F	$0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}2 \cdot 0{,}8^2$
F	F	R	$0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 \cdot 0{,}8^2$
F	F	F	$0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}8^3$

Det finns 3 sätt att gissa sig till två rätta svar. Sannolikheten är lika stor för de tre sätten och totalt är sannolikheten att gissa rätt två gånger av tre:

$$3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8 = 3 \cdot 0{,}032 = 0{,}096.$$

Vilket inte är speciellt osannolikt. □

Om antalet försök är större är det jobbigt att skriva upp alla utfall. Om X är binomialfördelad med antal försök n och sannolikhet att lyckas π så gäller

$$P(X = x) = p(x) = \binom{n}{x} \cdot \pi^x \cdot (1 - \pi)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Binomialkoefficienterna definieras av

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x! \cdot (n - x)!}, \quad \text{där } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \text{ och } 0! = 1.$$

Binomialkoefficienten tolkas som antal sätt att välja x element av n utan hänsyn till ordning.

Exempel. Om vi nu beräknar sannolikheten i exemplet med Erik:

$$P(X = 2) = p(2) = \binom{n}{2} \cdot \pi^2 \cdot (1 - \pi)^{n-2} = \binom{3}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot (1 - 0{,}2) = \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8$$
$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8.$$

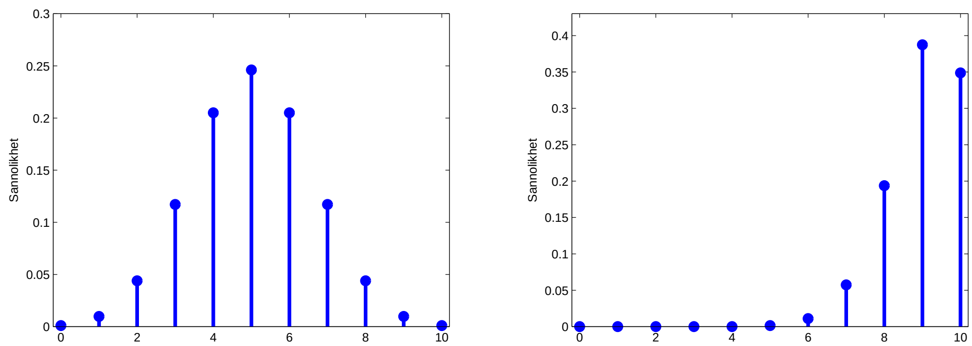
Vilket är detsamma som förut. Binomialkoefficienten som i detta fall är 3 räknar alltså antal sätt som det går att få 2 rätt av 3 på. □

Exempel. Hur många pokerhänder (5 kort) kan man få? Vi har n=52 kort och skall beräkna antal sätt vi kan välja ut 5 av dessa. Vi är inte intresserade av i vilken ordning korten delas ut.

$$\binom{52}{5} = \frac{1 \cdot \ldots \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot (1 \cdot \ldots \cdot 47)} = \frac{48 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2598960.$$

Det finns 2598960 olika pokerhänder. □

För en binomialfördelning kan medelvärdet beräknas till $n\pi$ och standardavvikelsen till $\sqrt{n\pi(1-\pi)}$. I figur 1 syns frekvensfunktioner för två binomialfördelningar.



Figur 1: Frekvensfunktioner för binomialfördelning där n =10 med π = 0,5 till vänster och π = 0,9 till höger.

Exempel. I NBA (National Basketball Association) så har de bästa straffskyttarna ungefär 90% chans att sätta ett givet kast. I en match får en spelare 10 försök. Antag att hans försök är oberoende, d.v.s. resultatet av ett kast påverkas inte av hur det gick med tidigare kast.

a) Beräkna sannolikheten att en spelare sätter alla 10 skotten.

Låt X vara antalet lyckade straffkast på 10 försök. X är binomialfördelad med π =0,9.

$$P(X=10) = p(10) = \binom{n}{10} \cdot \pi^{10} \cdot (1-\pi)^{n-10} = \binom{10}{10} \cdot 0{,}9^{10} \cdot 0{,}1^{10-10}$$
$$= \frac{10!}{10!0!} \cdot 0{,}9^{10} \cdot 0{,}1^{0} = 1 \cdot 0{,}9^{10} = 0{,}3487.$$

b) Beräkna sannolikheten att en spelare sätter exakt 9 skott.

$$P(X=9) = p(9) = \binom{n}{9} \cdot \pi^{9} \cdot (1-\pi)^{n-9} = \binom{10}{9} \cdot 0{,}9^{9} \cdot 0{,}1^{10-9}$$
$$= \frac{10!}{9!1!} \cdot 0{,}9^{9} \cdot 0{,}1^{1} = 10 \cdot 0{,}9^{9} \cdot 0{,}1 = 0{,}3874.$$

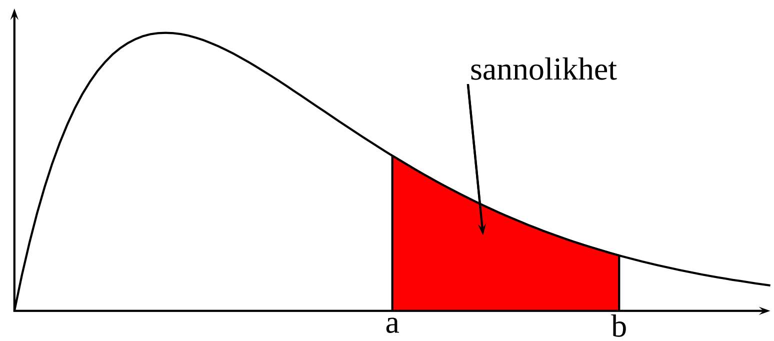
c) Beräkna sannolikheten att spelaren sätter 9 skott eller fler.

$$P(X \geq 9) = p(9) + p(10) = 0{,}3487 + 0{,}3874 = 0{,}7361$$

□

Kontinuerliga fördelningar

En stokastisk variabel är kontinuerlig om den kan anta vilket värde som helst i ett intervall. Fördelningen specificeras av sin täthetsfunktion. Ett exempel på en täthetsfunktion ges i figuren nedan.



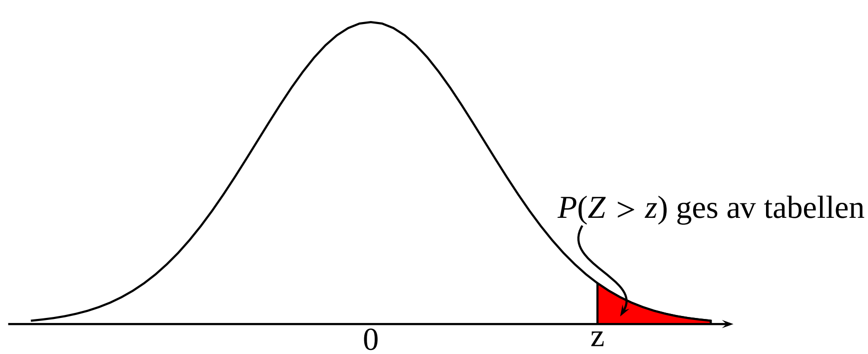
För täthetsfunktioner gäller följande

- Sannolikheten för att den stokastiska variabeln är mellan *a* och *b* ges av arean under täthetsfunktionen ovanför intervallet (a,b).
- Det intervall som innehåller alla möjliga värden har sannolikhet 1 alltså är arean under hela täthetsfunktionen 1.

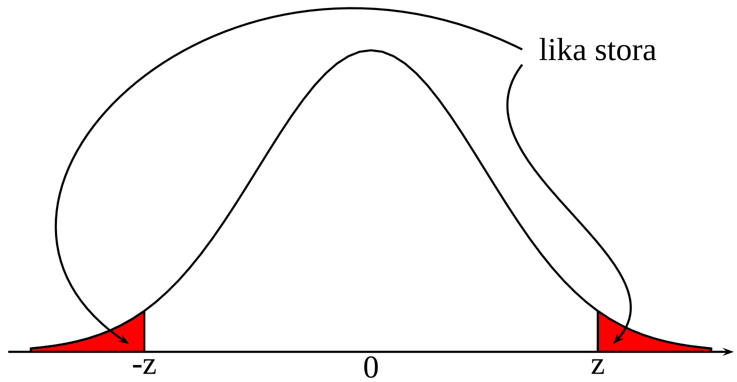
Observera att ett enstaka värde alltid har sannolikheten 0 så till exempel $P(X > x) = P(X \geq x)$.

Normalfördelningen

Normalfördelningen är den vanligaste kontinuerliga fördelningen. Den bestäms av sitt medelvärde, som vi skriver μ, och sin standardavvikelse, som vi skriver σ. Man kan skriva upp ett uttryck för täthetsfunktionen, men det måste integreras numeriskt. Istället används tabell 1 i boken för att slå upp sannolikheter. Tabellen ger endast värden för en normalfördelning, den så kallade standardnormalfördelningen, som har medelvärde μ=0 och standardavvikelse σ=1.



Tabellen ger bara sannolikheter som $P(Z > z)$. Utnyttja att arean under hela kurvan är 1 för att se att $P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z)$. Dessutom ger tabellen bara sannolikheter för positiva z. Då är det bra att känna till att normalfördelningen är symmetrisk så att om Z är standardnormalfördelad gäller att $P(Z > z) = P(Z < -z)$ som i figuren nedan.



För en normalfördelad stokastisk variabel X med medelvärde μ och standardavvikelse σ så gäller att $(X-\mu)/\sigma$ är standardnormalfördelad. Om Z är standardnormalfördelad kan alltså sannolikheter för X beräknas genom att standardisera, exempelvis är

$$P(X > x) = P\left(Z > \frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Exempel. I Nordamerika är kvinnors längd normalfördelad med medelvärde μ=65 tum och standardavvikelse σ=3,5 tum. Flera stora flygbolag har kravet att flygvärdinnor skall vara minst 62 tum. Hur stor andel av alla kvinnor i Nordamerika får inte bli flygvärdinnor?

Låt X=kvinnas längd. Vi vill beräkna $P(X > 62)$. Börja med att standardisera (Z betecknar en standardnormalfördelad variabel),

$$P(X < 62) = P\left(Z < \frac{62-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{62-65}{3,5}\right) = P(Z < -0,86).$$

Nu blir vi tvungna att utnyttja symmetrin hos normalfördelningen och får

$$P(Z < -0,86) = P(Z > 0,86) = 19,5\%$$

enligt tabell 1 i boken. Alltså är det 19,5 % av kvinnorna som är kortare än 62 tum och därmed inte kan bli flygvärdinnor. □

Approximation av binomialfördelningen

När antal försök i binomialfördelningen är stort kan det vara besvärligt att beräkna sannolikheter för vissa händelser. Försök t.ex. beräkna sannolikheten att $X \geq 900$ om X är binomialfördelad med n=1000 och π=0,8. Man måste alltså beräkna många sannolikheter och addera dem;

$$P(X \geq 900) = P(X = 900) + P(X = 901) + P(X = 902) + \ldots + P(X = 1000).$$

Istället kan man utnyttja att binomialfördelningen nästan har samma form som normalfördelningen för stora n, i praktiken är en tumregel att $n\pi(1-\pi) > 5$. Om X är binomialfördelad med antal försök n och sannolikhet att lyckas π så kan X approximeras med en normalfördelning med medelvärde $n\pi$ och standardavvikelse $n\pi(1-\pi)$. Detta faktum utnyttjas när vi gör konfidensintervall och hypotesprövning för andelar i kapitel 6 och 7.

Övningsuppgifter

1. Beräkna sannolikheten att få exakt tre krona vid kast med sex mynt.

2. Beräkna sannolikheten att få minst fem krona vid kast med sex mynt.

3. Vid en kvalitetskontroll tar man ut tio enheter ur en låda med många enheter. Lådan sänds i retur om mer än en är defekt.

   a) Hur stor är sannolikheten att returnera lådan om enheterna har en felsannolikhet på 0,06?

   b) Hur stor blir samma sannolikhet om man istället tar ut 20 enheter? Lådan returneras fortfarande om mer än en enhet är defekt.

   c) Om felsannolikheten istället är 0,1 och man tar ut 20 enheter, vad är då sannolikheten att returnera lådan?

4. Kontrollen ovan förändras så att vi plockar ut tio enheter. Om ingen är defekt accepteras partiet och om fler än tre är defekta sänds partiet tillbaka. Annars (om 1, 2 eller 3 är defekta) plockar man ut fem enheter till och partiet sänds tillbaka om någon av dessa är defekta och accepteras om ingen är defekt. Hur stor är sannolikheten att ett parti med felsannolikheten 0,05 accepteras?

5. Om vi utför 20 hypotestest på nivån α=5 % där vi vet att nollhypotesen är sann så vet vi att slumpen kan göra att nollhypotesen ändå förkastas. Eftersom signifikansnivån är 5 % vet vi att nollhypotesen kommer att förkastas med sannolikhet 5 % även när den är sann.

   a) Hur stor är sannolikheten att ingen av de 20 nollhypoteserna förkastas?

   b) Hur stor är sannolikheten att precis en förkastas?

   c) Hur stor är sannolikheten att åtminstone någon av nollhypoteserna förkastas?

6. Låt Z vara normalfördelad med medelvärde 0 och standardavvikelse 1. Bestäm

   a) $P(Z > 1{,}77)$

   b) $P(Z \leq 1{,}77)$

   c) $P(Z < -0{,}56)$

7. Låt X vara normalfördelad med medelvärde 10 och standardavvikelse 2. Bestäm

   a) $P(X > 11{,}33)$

   b) $P(X \leq 11{,}33)$

c) $P(X < 9{,}02)$

8. Längden hos 18 månader gamla pojkar i Sverige kan sägas vara normalfördelad med medelvärde 83 cm och standardavvikelse 2,5 cm. Hur stor andel av alla 18 månaders pojkar är kortare än 79 cm?

Svar

1. X = antal krona är binomialfördelad med n=6 och π=1/2.

$$P(X=3)=\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6-3}=\frac{5}{16}\approx 0{,}3125$$

2.

$$P(X\geq 5)=P(X=5)+P(X=6)=\binom{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6-5}+\binom{6}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6-6}$$
$$=6\cdot\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^6}=\frac{7}{64}\approx 0{,}109$$

3. a) X = antal felaktiga enheter, är binomialfördelad med n=10 och π=0,06.

$$\begin{aligned}P(X>1)&=1-(P(X=0)+P(X=1))\\&=1-\binom{10}{0}\cdot 0{,}06^{0}\cdot(1-0{,}06)^{10-0}-\binom{10}{1}\cdot 0{,}06^{1}\cdot(1-0{,}06)^{10-1}\\&=1-0{,}94^{10}-10\cdot 0{,}06\cdot 0{,}94^{10}\approx 0{,}1176\end{aligned}$$

b) Samma beräkningar som i a) men n=20 istället ger $P(X>1)\approx 0{,}3395$

c) Samma beräkningar som i a) men n=20 och π=0,10 istället ger $P(X>1)\approx 0{,}6083$

4. X = antal felaktiga enheter i första urvalet, är binomialfördelad med n=10 och π=0,05. Y = antal felaktiga enheter i andra urvalet, är binomialfördelad med n=5 och π=0,05.

P(Acceptera partiet) = P(Första urvalet har ingen felaktig)
+ P(Första urvalet har 1, 2 eller 3 felaktiga och andra urvalet har ingen felaktig)

Första och andra urvalet är oberoende och vi får

P(Acceptera partiet) = P(Första urvalet har ingen felaktig)
+ P(Första urvalet har 1, 2 eller 3 felaktiga) · P(Andra urvalet har ingen felaktig)

$$\begin{aligned}&=\binom{10}{0}\cdot 0{,}05^{0}\cdot(1-0{,}05)^{10-0}+\left\{\binom{10}{1}\cdot 0{,}05^{1}\cdot(1-0{,}05)^{10-1}\right.\\&\quad\left.+\binom{10}{2}\cdot 0{,}05^{2}\cdot(1-0{,}05)^{10-2}+\binom{10}{3}\cdot 0{,}05^{3}\cdot(1-0{,}05)^{10-3}\right\}\\&\quad\cdot\binom{5}{0}\cdot 0{,}05^{0}\cdot(1-0{,}05)^{5-0}\\&=0{,}5987+(0{,}3151+0{,}0746+0{,}0105)\cdot 0{,}7738\approx 0{,}9084.\end{aligned}$$

5. X = antal hypotestest som förkastas (när nollhypoteserna är sanna) är binomialfördelad med n=20 och π=0,05.

a)

$$P(X = 0) = \binom{20}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot (1 - 0{,}05)^{20-0} \approx 0{,}3585$$

b)

$$P(X = 1) = \binom{20}{1} \cdot 0{,}05^1 \cdot (1 - 0{,}05)^{20-1} \approx 0{,}3774$$

b)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0{,}6415$$

6. a) $P(Z > 1{,}77) = 3{,}8\%$

   b) $P(Z \leq 1{,}77) = 1 - P(Z > 1{,}77) = 96{,}2\%$

   c) $P(Z < -0{,}56) = P(Z > 0{,}56) = 28{,}8\%$

7. Låt Z vara standardnormalfördelad.

   a) $P(X > 11{,}33) = P\left(Z > \frac{11-10}{2}\right) = P(Z > 0.665) \approx 25{,}1\%$

   b) $P(X \leq 11{,}33) = 1 - P(X > 11{,}33) = 74{,}9\%$

   c) $P(X < 9{,}02) = P\left(Z < \frac{9{,}02-10}{2}\right) = P(Z < -1{,}6) = P(Z > 1{,}6) = 31{,}2\%$

8. Låt X vara en pojkes längd. Vi har givet att X är normalfördelad med medelvärde 83 cm och standardavvikelse 2,5 cm. Låt Z vara standardnormalfördelad.

$$P(X < 79) = P\left(Z < \frac{79 - 83}{2{,}5}\right) = P(Z < -1{,}6) = P(Z > 1{,}6) = 5{,}5\%.$$