

Industriell matematik och statistik, LMA136 2013/14

Uppgift 1

Uppgift 2

Uppgift 3

4 Mars 2014

Disposition

Specifik data genererades till varje student så inga tal redovisas utan bara (ett förslag på) lösningsalgorithmer.

Uppgift 1

Uppgift 2

Uppgift 3

Uppgift 1

Uppgift 2

Uppgift 3

Uppgift 1

Av centrala gränsvärdessatsen finner vi $\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$ approximativt $N(0, 1)$. Det innebär att undre gräns för $(1-\alpha)$ -konfidsintervall ges av

$$\hat{p} - q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},$$

då $q_{1-\alpha/2}$ är $(1-\alpha/2)$ -kvantil till den standardiserade normalfördelningen.

► a) $1-\alpha = 0.95$ ger $\alpha = 0.05$ och

$$q_{1-0.05/2} = q_{0.975} = 1.96$$

► b) $1-\alpha = 0.99$ ger $\alpha = 0.01$ och

$$q_{1-0.01/2} = q_{0.995} = 2.58$$

► c)

$$\begin{aligned} P(p < 0.04) &= P(-p > -0.04) \\ &= P\left(\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} > \frac{\hat{p} - 0.04}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{\hat{p} - 0.04}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}\right) \quad \text{titta i tables} \end{aligned}$$

(1)

Uppgift 1

Uppgift 2

Uppgift 3

Uppgift 1

Uppgift 2

Uppgift 3

Av centrala gränsvärdessatsen vet vi $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}/\sqrt{n}} \sim t(n - 1)$

- ▶ a) $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- ▶ b) $t_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
- ▶ c) titta i tables: T [both] med $t = t_{obs}$ samt $n - 1$ frihetsgrader
- ▶ d) Förkasta H_0 om p-värdet mindre än α annars acceptera H_0 .

Alternativt; förkasta H_0 om $|t_{obs}| > q_{1-\alpha/2}$, då $q_{1-\alpha/2}$ är $(1 - \alpha/2)$ -kvantilen, annars acceptera H_0 . Metoderna är ekvivalenta.

Uppgift 3

X är rektangelfördelad på $[0, b]$. $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$,
 $\hat{\mu}_2 = c m(X_1, X_2, X_3)$, då $m(X_1, X_2, X_3)$ är en funktion som
väljer det mittersta värdet av (X_1, X_2, X_3) .

- a) $\hat{\mu}_1$ är väntevärdesriktig eftersom

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{\mu}_1] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)\right] \\ &= \frac{1}{3}(\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3]) \\ &= \mathbb{E}[X_1]\end{aligned}$$

samtidigt som median och väntevärdet för X båda är $\frac{b}{2}$.

- b) $c = 1$ eftersom

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{\mu}_2] &= \mathbb{E}[c m(X_1 + X_2 + X_3)] \\ &= c \int_0^b x \frac{6}{b^3} x(b-x) dx \\ &= c \frac{b}{2}\end{aligned}$$

Uppgift 1

Uppgift 2

Uppgift 3

- c) $\hat{\mu}_1$ effektivare än $\hat{\mu}_2$ eftersom $\text{Var}(\hat{\mu}_1) < \text{Var}(\hat{\mu}_2)$

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{\mu}_1) &= \text{Var}\left(\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)\right) \\&= \frac{1}{3^2}(\text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \text{Var}(X_3)) \\&= \frac{1}{3} \frac{(b-0)^2}{12} = \frac{b^2}{36}, \\ \text{Var}(\hat{\mu}_2) &= \int_0^b \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 \frac{6}{b^3} x(b-x) dx \\&= \frac{6}{b^3} \int_0^b x^3(b-x) dx - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\&= \frac{6}{b^3} \frac{b^5}{20} - \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{20}.\end{aligned}$$