

Industriell matematik och statistik, LMA136 2013/14

6 December 2013

Repetition

Diskret
stokastisk
variabel

Likformig
fördelning

Binomialfördelning

Hypergeometrisk
fördelning

Poissonfördelning

Repetition

Diskret stokastisk variabel

- Likformig fördelning
- Binomialfördelning
- Hypergeometrisk fördelning
- Poissonfördelning

Repetition

Diskret
stokastisk
variabel

Likformig
fördelning
Binomialfördelning
Hypergeometrisk
fördelning
Poissonfördelning

- ▶ Oberoende händelser
- ▶ Betingade sannolikheter
- ▶ Kombinatorik

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Välja ut k element ur en population bestående av totalt n element.

Antal	med återläggning	utan återläggning
permutationer	n^k	$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$
kombinationer	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Repetition

Diskret
stokastisk
variabel

Likformig
fördelning

Binomialfördelning

Hypergeometrisk
fördelning

Poissonfördelning

Repetition

Diskret
stokastisk
variabel

Likformig
fördelning
Binomialfördelning
Hypergeometrisk
fördelning
Poissonfördelning

Diskret stokastisk variabel är en **reellvärd funktion** med Ω som definitionsmängd och diskret utfallsrum.

Ex 1. $X =$ utfall i slantsingling, $\Omega = \{\text{krona, klave}\}$, om

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{om } X = \text{krona} \\ 0 & \text{om } X = \text{krona}^c \end{cases}$$

då är Y en diskret stokastisk variabel.

Ex 2. $Y =$ antal ggr som man får stanna för rött trafikljus.

Repetition

Diskret
stokastisk
variabel

Likformig
fördelning
Binomialfördelning
Hypergeometrisk
fördelning
Poissonfördelning

Fördelningsfunktion $P(X \leq x)$ för alla x .

Sannolikhetsfunktion $P(X = x_k)$ för $k = 0, 1, 2, \dots$

$$P(X \leq x) = \sum_{\{k: x_k \leq x\}} P(X = x_k)$$

En sannolikhetsfunktion måste uppfylla två kriterier:

- ▶ $P(X = x_k) \geq 0$ för alla k
- ▶ $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = x_k) = 1$

Repetition

**Diskret
stokastisk
variabel**

Likformig
fördelning
Binomialfördelning
Hypergeometrisk
fördelning
Poissonfördelning

Sannolikhetsfunktion $P(X = x_k)$ för $k = 1, 2, \dots$

Väntevärde, $\mu = \mathbb{E}[X]$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x_k \in \Omega} x_k P(X = x_k)$$

Varians, $\sigma^2 = \text{Var}(X)$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sum_{x_k \in \Omega} (x_k - \mu)^2 P(X = x_k)$$

Repetition

Diskret
stokastisk
variabel**Likformig
fördelning**

Binomialfördelning

Hypergeometrisk
fördelning

Poissonfördelning

Alla utfall har lika stor sannolikhet att inträffa.

$$\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad P(X = x_k) = \frac{1}{n}$$

Typexempel: Tärning, X = antal tärningsögon

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \sum_{x_k \in \Omega} x_k P(X = x_k) = \frac{1}{n} \sum_{x_k \in \Omega} x_k$$

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{x_k \in \Omega} x_k^2 - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{x_k \in \Omega} x_k \right)^2$$

Binomialfördelning

X = Antal lyckade utfall av n likadana oberoende försök.

X är $\text{Bin}(n, p)$ -fördelad, p = sannolikhet att ett individuellt försök lyckas.

- ▶ $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n\}$,
- ▶ $X_i = 1$ om försök i lyckas
- ▶ $P(X_i = 1) = p$
- ▶ $X = \sum_{i=1}^n X_i$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Ex: n trafikljus, X = antal rödsignaler, alla oberoende och sannolikhet p att det är rött.

$$\mathbb{E}[X] = np, \quad \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = np(1 - p)$$

Repetition

Diskret
stokastisk
variabel

Likformig
fördelning

Binomialfördelning

Hypergeometrisk
fördelning

Poissonfördelning

Hypergeometriskt fördelning

X är $\text{Hyp}(N, n, p)$ -fördelad

- ▶ N = totalt antal
- ▶ n = urvalsstorlek
- ▶ Np = totalt antal som har den studerade egenskapen

$$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N - Np}{n - k}}{\binom{N}{n}}$$

Ex: sannolikheten att dra k defekta komponenter då man väljer n komponenter av N och det finns totalt Np defekta.

$$\mathbb{E}[X] = np, \text{Var}(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p)$$

Repetition

Diskret
stokastisk
variabel

Likformig
fördelning

Binomialfördelning

**Hypergeometrisk
fördelning**

Poissonfördelning

Repetition

Diskret
stokastisk
variabel

Likformig
fördelning
Binomialfördelning
Hypergeometrisk
fördelning

Poissonfördelning

X är $Po(\lambda)$ fördelad

- λ genomsnittliga antal i ett intervall

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$\mathbb{E}[X] = \lambda, \text{ Var}(X) = \lambda$$