

Industriell matematik och statistik, LMA136 2013/14

14 Februari 2014

Repetition

Normalfördelningen

Centrala gränsvärdesatsen

Binomialapproximation

Halvkorrektur

Disposition

Föreläsning 8

Repetition

Repetition

Normalfördelningen

Centrala gränsvärdessatsen

Binomialapproximation
Halvkorrektion

Normalfördelningen

Centrala gränsvärdessatsen

Binomialapproximation

Halvkorrektion

Repetition

Normalfördelningen

Centrala gränsvärdesatsen

Binomialapproximation
Halvkorrektion

- ▶ $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$
- ▶ $\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X)$
- ▶ $\mathbb{E}[g(X)] = \begin{cases} \sum_{x_i \in \Omega} g(x_i)P(X = x_i), & X \text{ diskret s.v.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx, & X \text{ kontinuerlig s.v.} \end{cases}$
- ▶ Om $P(X \leq x \cap Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$, $\forall x, y$ så kallas X och Y oberoende
- ▶ $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
- ▶ $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ om X och Y oberoende

- Om $X_i \sim \text{Bin}(n_i, p)$ samt alla X_i oberoende då gäller att

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}\left(\sum_{i=1}^n n_i, p\right)$$

- Om $X_i \sim \text{Po}(\lambda_i)$ samt alla X_i oberoende då gäller att

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Po}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

- Om $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ samt alla X_i oberoende då gäller att

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}\right)$$

Repetition

Normalfördelningen

Centrala gränsvärdessatsen

Binomialapproximation
Halvkorrektion

Om $X \sim N(\mu, \sigma)$, vad har $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ för fördelning?

Kom ihåg;

- ▶ $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$
- ▶ $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$

- ▶ $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

DeMoivre-Laplace gränsvärdessats

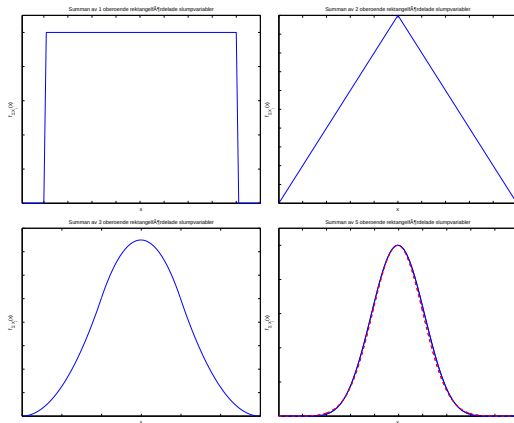
Repetition

Normalfördelningen

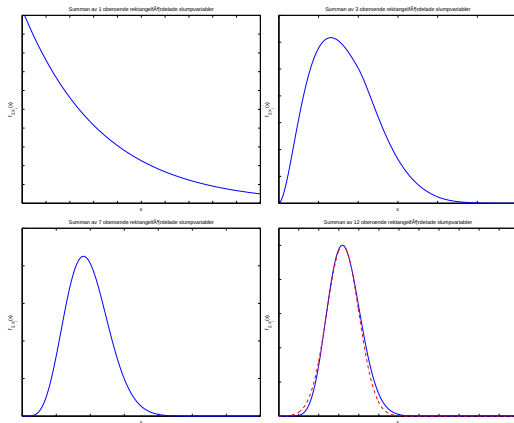
Centrals gränsvärdessatsenBinomialapproximation
Halvkorrektur

Antag att $X_1, X_2, \dots, X_n$ är n stycken oberoende och likafördelade stokastiska variabler med väntevärde μ och standardavvikelse σ . Då gäller att:

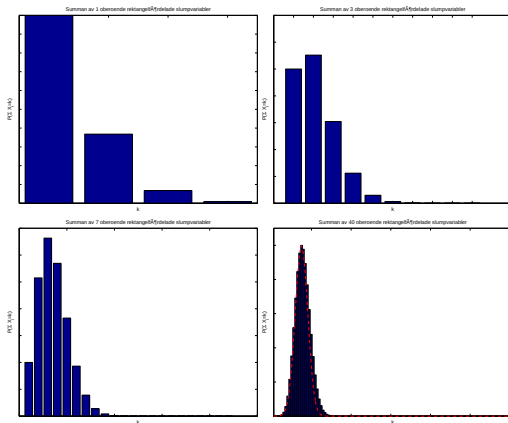
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = P(Z \leq x).$$



Figur: Fördelning för summor av oberoende rektangelfördelade slumpvariabler



Figur: Fördelning för summor av oberoende exponentialfördelade slumpvariabler



Figur: Fördelning för summor av oberoende Poissonfördelade slumpvariabler

DeMoivre-Laplace gränsvärdessats

Repetition

Normalfördelningen

Centrala gränsvärdessatsen

Binomialapproximation

Halvkorrektion

Antag att $X_1, X_2, \dots, X_n$ är n stycken oberoende och likafördelade stokastiska variabler med väntevärde μ och standardavvikelse σ . Då gäller att:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = P(Z \leq x).$$

$$P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi \text{ (beräknas ur tabell)}$$

$(P(Z \leq x) \text{ skrivs ibland } \Phi(x))$

dvs. $\sum_{i=1}^n X_i$ approximativt $N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$ fördelad för stora n för vilken fördelning som helst på X_i !

Tärningssumma

Ex. X_i är utfall tärningsögon för tärningskast i .

$$\mu = \mathbb{E}[X_i] = 3.5$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X_i)} = \sqrt{\mathbb{E}[X_i^2] - \mu^2} = \sqrt{15\frac{1}{6} - 3.5^2} = 1.707\dots$$

Då gäller att $\sum_{i=1}^n X_i \sim N(3.5n, 1.707\sqrt{n})$ för stora n .

Chansen att summan tärningsögon av 100 tärningskast är mindre än 300 är

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^n X_i < 300\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\mu < 300 - 100\mu\right) \\ &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\mu}{\sigma\sqrt{100}} < \frac{300 - 100\mu}{\sigma\sqrt{100}}\right) \\ &= P(Z < -2.929\dots) \quad \text{se i tabell} \\ &= 0.00169\dots \end{aligned}$$

Repetition

Normalfördelning

Centrala gräns-
värdessatsen

Binomialapproximation
Halvkorrektion

Fördelning för medelvärde

Definition av medelvärde, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ om

- ▶ $\mu = \mathbb{E}[X_i]$
- ▶ $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$

då gäller att;

- ▶ $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \mu$
- ▶ $\text{Var}(\bar{X}_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$

$$\begin{aligned}
 P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq x\right) &= P\left(\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x\right) \\
 &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \\
 &\rightarrow P(Z \leq x)
 \end{aligned}$$

Så $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ är approximativt $N(0, 1)$ dvs $\bar{X}$ är approximativt $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Repetition

Normalfördelning

Centrala gränsvärdessatsen

Binomialapproximation
Halvkorrektur

Medel av tärningssumma

Ex. X_i är utfall av tärningsögon för tärningskast i .

$$\mu = 3.5, \quad \sigma = 1.707...$$

$\bar{X}_n$ är approximativt $N(3.5, \frac{1.707}{\sqrt{n}})$ för stora n .

Chansen att medelvärdet av 100 tärningskast är mindre än 3 är

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_{100} < 3) &= \text{se i tabell} \\ &= 0.00169... \end{aligned}$$

Repetition

Normalfördelningar

Centrala gränsvärdessatsen

Binomialapproximation
Halvkorrektur

Normalapproximation av binomialfördelningen

Antag att vi skall beräkna $P(X \leq x)$ för $X \sim \text{Bin}(n, p)$ och något stort n .

Vi vet

- ▶ $\mathbb{E}[X] = np$
- ▶ $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

Notera att $X = \sum_{i=1}^n X_i$

Genom centrala gränsvärdessatsen gäller att om n tillräckligt stort att

$$P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1 - p)}}\right) \approx P(Z \leq x)$$

dvs. X approximativt $N(np, \sqrt{np(1 - p)})$ -fördelad

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1 - p)}} \leq \frac{x - np}{\sqrt{np(1 - p)}}\right) \\ &\rightarrow P\left(Z \leq \frac{x - np}{\sqrt{np(1 - p)}}\right) \end{aligned}$$

Repetition

Normalfördelningen

Centrala gränsvärdessatsen

Binomialapproximation
Halvkorrektion

X_i = utfall i roulettespel i . $X_i = 1$ om vinst i spel i och $X_i = 0$ annars.

W_n monetära utfall för casinot av n spel.

$$W_n = -(36 * 100 \sum_{i=1}^n X_i - 100n)$$

► $\mathbb{E}[W_n] = \frac{100}{37}n$

► $\sqrt{\text{Var}(W_n)} = \sqrt{36^2 100^2 n \frac{1}{37} (1 - \frac{1}{37})} = \frac{100 * 36 * 6 \sqrt{n}}{37}$

$$\begin{aligned} P(W_n < 0) &= P(Z < -\frac{\mathbb{E}[W_n]}{\sqrt{\text{Var}(W_n)}}) \\ &= P(Z < -\frac{100n}{100 * 36 * 6 \sqrt{n}}) \\ &= P(Z < -\frac{\sqrt{n}}{6^3}) \end{aligned}$$

Repetition

Normalfördelningen

Centrals gränsvärdesatsen

Binomialapproximation
Halvkorrektur

Repetition

Normalfördelningen

Centrala gräns-
värdessatsen**Binomialapproximation**

Halvkorrektion

X = antal lyckade utfall av n oberoende försök.

$X \sim \text{Bin}(n, p)$ men p är okänd.

Önskar skatta sannolikheten att ett enskilt försök lyckas.

X är approx $N(np, \sqrt{np(1-p)})$ -fördelad.

Låt $\hat{p} = X/n$ då gäller att

$\hat{p} \sim N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$ -fördelad

Repetition

Normalfördelningen

Centrala gräns-
värdessatsen

Binomialapproximation

Halvkorrektion

Om X diskret s.v. så gäller att $P(X < x) \neq P(X \leq x)$, för något x

Normalapproximera med halvkorrektion
(kontinuitetskorrektion);
om $x = 12$ så använd $\tilde{x} = 12.5$.