Tentamen LMA 200 Matematisk statistik, 120310

Tentamen består av åtta uppgifter motsvarande totalt 50 poäng. Det krävs minst 20 poäng för betyg 3, minst 30 poäng för 4 och minst 40 poäng för 5.

Examinator: Ulla Blomqvist, ankn 5886

Hjälpmedel: Formelsamling, H. Blomqvist och Chalmersgodkänd miniräknare
Resultat: Meddelas genom mail när resultatet är inrapporterat i LADOK.
Granskning: Kommer att ske i samband med en föreläsning. Tid och datum meddelas via mail efter rättningen.

Besöker tentamen: c:a kl 14.30 och 17.00

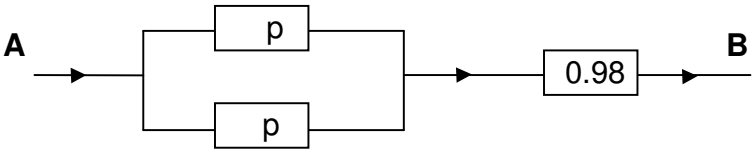
Lycka till!

Uppgift 1: En urna innehåller 3 svarta och 6 vita kulor och en annan urna 7 svarta och 3 vita kulor. Man tar slumpmässigt och utan återläggning 3 kulor från vardera urnan. Vad är sannolikheten att man tar lika många svarta kulor från varje urna?

(6 poäng)

Uppgift 2: I nedanstående system fungerar komponenterna oberoende av varandra.

a) Anta att funktionssannolikheten p = 0.99. Beräkna sannolikheten att systemet fungerar, dvs att strömmen går från A till B.
b) Bestäm p så att sannolikheten för att systemet fungerar blir 0.9.



(8 poäng)

Uppgift 3: En leverans med taktegel innehåller 1000 buntar varav 150 buntar innehåller minst en trasig tegelpanna. Vid en kvalitetskontroll tar man slumpmässigt ut 15 buntar.

a) Vad är sannolikheten att man finner minst en trasig tegelpanna vid kontrollen?
b) Vad är sannolikheten att man finner minst en trasig tegelpanna redan i den först undersökta bunten?

(6 poäng)

Uppgift 4: Antalet inkommande samtal under 1 minut till en telefonväxel antas vara Poissonfördelat med $\lambda = 5$.

a) Vad är sannolikheten att det under en 30 sekunders period inte kommer ett enda samtal?
b) Vad är sannolikheten att det går längre tid än 15 sekunder mellan två successiva samtal?

(6 poäng)

Uppgift 5: En kontinuerlig stokastisk variabel ξ har frekvensfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0.25 + ax & \text{för } -2 \le x < 0 \\ 0.25 & \text{för } 0 \le x < 2 \\ 0.25 - ax & \text{för } 2 \le x < 4 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

a) Bestäm konstanten a.
b) Beräkna den stokastiska variabelns väntevärde.

(6 poäng)

Uppgift 6: Livslängden, ξ, i timmar för en viss typ av glödlampor kan antas vara normalfördelad med väntevärdet 1500 och standardavvikelsen 50.

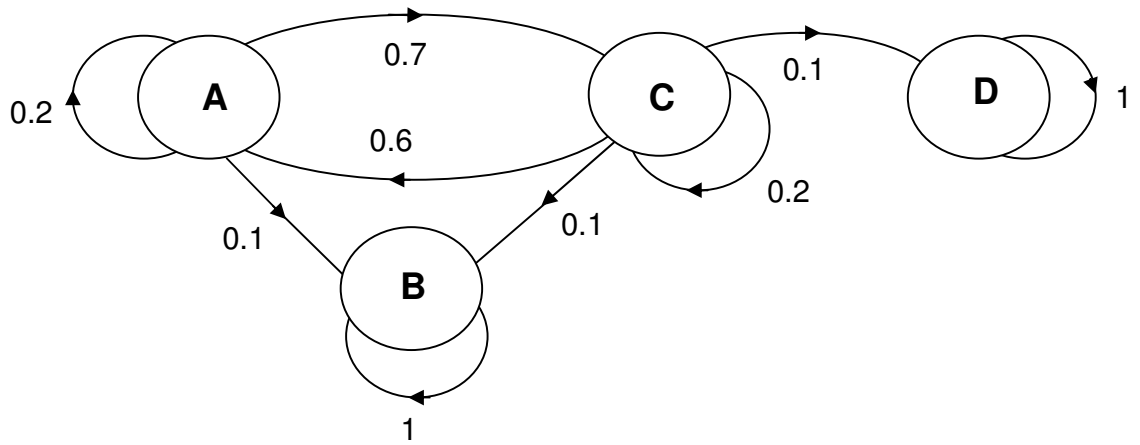
a) Bestäm x så att $P(\xi > x) = 0.99$.
b) Anta att man köper in 5 sådana glödlampor. Vad är sannolikheten att högst 4 av dem har en livslängd som överstiger 1550 timmar?

(6 poäng)

Uppgift 7: På en byggarbetsplats kör man sand med en skottkärra från ett sandupplag till betongblandaren. Mängden sand per lass varierar på ett sådant sätt att lassvikterna kan ses som oberoende likafördelade variabler med väntevärde 100 kg och standardavvikelse 20 kg. En dag behöver man 5 000 kg sand vid betongblandaren. Anta att man beställer 51 kärror sand. Beräkna sannolikheten att den kvantitet man då får uppgår till minst 5 000 kg.

(6 poäng)

Uppgift 8:
Anta att man har en Markovkedja i diskret tid som kan illustreras med nedanstående flödesdiagram

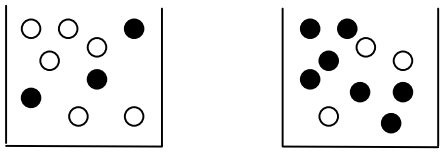


Beräkna förväntat antal tidsenheter tills processen kommer in i ett absorberande tillstånd om processen startar i tillstånd **A**.

(6 poäng)

Lösningar till tentamen i matematisk statistik, LMA200, den 20120310

Uppgift 1:



ξ = antal svarta kulor i urna 1 $\qquad$ η = antal svarta kulor i urna 2

P(lika många svarta kulor i urvalet från urna 1 som i urvalet från urna 2) =

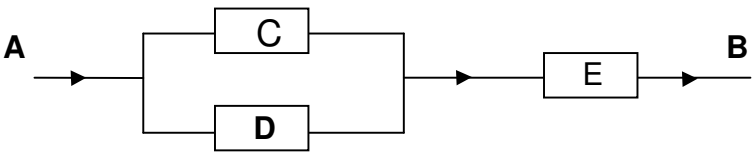
$= P(\xi = 0 \cap \eta = 0) + P(\xi = 1 \cap \eta = 1) + P(\xi = 2 \cap \eta = 2) + P(\xi = 3 \cap \eta = 3) =$ (ober) =

$$= \frac{\binom{3}{0}\binom{6}{3}}{\binom{9}{3}} \cdot \frac{\binom{7}{0}\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{3}{1}\binom{6}{2}}{\binom{9}{3}} \cdot \frac{\binom{7}{1}\binom{3}{2}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{6}{1}}{\binom{9}{3}} \cdot \frac{\binom{7}{2}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{3}{3}\binom{6}{0}}{\binom{9}{3}} \cdot \frac{\binom{7}{3}\binom{3}{0}}{\binom{10}{3}} =$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}}{\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}} \cdot \frac{1\cdot1}{\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}} + \frac{3\cdot\frac{6\cdot5}{2\cdot1}}{\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}} \cdot \frac{7\cdot\frac{3\cdot2}{2\cdot1}}{\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}} + \frac{\frac{3\cdot2}{2\cdot1}\cdot 6}{\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}} \cdot \frac{\frac{7\cdot6}{2\cdot1}\cdot 3}{\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}} + \frac{1\cdot1}{\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}} \cdot \frac{\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}\cdot 1}{\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}} =$$

$$= \frac{20+945+1134+35}{84\cdot120} = 0.212$$

Uppgift 2:



$P(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) = P[\,(\mathbf{C} \cup \mathbf{D}) \cap \mathbf{E}\,] = [\,P(\mathbf{C}) + P(\mathbf{D}) - P(\mathbf{C} \cap \mathbf{D})\,] \cdot P(\mathbf{E})$

a) $P(\mathbf{C}) = P(\mathbf{D}) = 0.99 \qquad P(\mathbf{E}) = 0.98$

$P(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) = [\,0.99 + 0.99 - 0.99 \cdot 0.99\,] \cdot 0.98 = 0.9799$

Lösningen till b-uppgiften finns på nästa sida

Uppgift 2b:

$P(\mathbf{C}) = P(\mathbf{D}) = p$ där $0 \le p \le 1$ $\quad P(\mathbf{E}) = 0.98$

$P(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) = [\, p + p - p \cdot p \,] \cdot 0.98 = 0.9 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 2p - p^2 = \dfrac{0.9}{0.98} \quad \Leftrightarrow \quad p^2 - 2p + \dfrac{0.9}{0.98} = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad p = 1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{0.9}{0.98}} \quad \Leftrightarrow \quad p = 1 \pm \dfrac{2}{7}$

$(\, p_1 = 1 + \dfrac{2}{7} \,)$ och $p_2 = 1 - \dfrac{2}{7} = \dfrac{5}{7}$

Uppgift 3:

a) ξ = antal buntar i urvalet som innehåller minst en trasig tegelpanna

ξ är Hyp(N, n, Np) = Hyp(1000, 15, 150)

Eftersom $\dfrac{n}{N} = \dfrac{15}{1000} = 0.015 < 0.1 \quad \Rightarrow$ använd binomialapproximation

ξ är ungefär Bin(n, p) = Bin(15, 0.15)

$P(\xi \ge 1) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - \binom{15}{0} 0.15^0 \cdot 0.85^{15} \approx 0.913$

b) A = minst en trasig tegelpanna i första undersökta bunten i urvalet

$P(A) = \dfrac{G}{M} = \dfrac{150}{1000} = 0.15$

Uppgift 4:

a) ξ = antal inkommande telefonsamtal $\quad \xi$ är Po(λ = 5 samtal/ minut)

Räkna om λ att gälla för intervallet 30 sek. λ = 2.5 samtal/ 30 sek

$P(\xi = 0) = e^{-2.5} \cdot \dfrac{2.5^0}{0!} \approx 0.082$

b) η = tiden mellan 2 successiva samtal $\quad \eta$ = Exp ($\lambda = \dfrac{5}{60}$ samtal/ sek)

$P(\xi > 15) = 1 - P(\xi \le 15) = 1 - (1 - e^{-15 \cdot \frac{5}{60}}) = e^{-1.25} \approx 0.2865$

Uppgift 5:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \quad \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (0.25 + ax)\,dx + \int_{0}^{2} 0.25\,dx + \int_{2}^{4} (0.25 - ax)\,dx$$

$$\left[0.25x + \frac{ax^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[0.25x\right]_{0}^{2} + \left[0.25x - \frac{ax^2}{2}\right]_{2}^{4} =$$

$$= \left[0 - (0.25\cdot(-2) + \frac{a(-2)^2}{2})\right] + 0.25 \cdot 2 + \left[(0.25\cdot 4 - \frac{a4^2}{2}) - (0.25\cdot 2 - \frac{a2^2}{2})\right] =$$

$$= 1.5 - 8a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{16}$$

b) $E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx = \frac{1}{16}\int_{-2}^{0} x\cdot(4 + x)\,dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{2} x\,dx + \frac{1}{16}\int_{2}^{4} x\cdot(4 - x)\,dx =$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{4x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} + \frac{1}{16}\left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{2}^{4} =$$

$$= \frac{1}{16}\left[0 - (\frac{4\cdot(-2)^2}{2} + \frac{(-2)^3}{3})\right] + \frac{1}{4}\cdot\frac{2^2}{2} + \frac{1}{16}\left[(\frac{4\cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3}) - (\frac{4\cdot 2^2}{2} - \frac{2^3}{3})\right] =$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Uppgift 6: ξ = livslängd $\quad$ ξ är $N(\mu, \sigma) = N(1500, 50)$

a) $P(\xi > x) = 1 - P(\xi < x) = 1 - P(Z < \frac{x-1500}{50}) = 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad P(Z < \frac{x-1500}{50}) = 0.01$

$\Rightarrow \quad \frac{x-1500}{50} < 0$ $\quad$ (vilket betyder att denna sannolikhet inte går att slå upp i tabellen)

$\frac{x-1500}{50} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{x-1500}{50} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(Z < -\frac{x-1500}{50}) = 0.99$

Normalfördelningstabellen ger

$P(Z < 2.33) = 0.99 \quad \Rightarrow \quad -\frac{x-1500}{50} = 2.33 \quad \Rightarrow \quad x = 1383.5$

Lösningen till uppgift 6 b finns på nästa sida

uppgift 6 b

$P(\xi > 1550) = 1 - P(\xi < 1550) = 1 - P(Z < \frac{1550-1500}{50}) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

η är Bin(n, p) = Bin (5, 0.1587)

$P(\eta \le 4) = 1 - P(\eta = 5) = 1 - \binom{5}{5} 0.1587^5 \cdot 0.8413^0 \approx 1 - 0.0001 = 0.9999$

Uppgift 7: ξ_i = vikten i skottkärra "i" $E(\xi_i) = 100$ $S(\xi_i) = 20$

η = total vikt hos 51 skottkärror där $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots.. + \xi_{51}$

$E(\eta) = 51\ E(\xi) = 51 \cdot 100 = 5100$ $Var(\eta) = 51\ Var(\xi) = 51 \cdot 20^2 = 20400$

$P(\eta > 5000) = 1 - P(\eta < 5000) = 1 - P(Z < \frac{5000 - 5100}{\sqrt{20400}}) = 1 - P(Z < -0.7) =$

$= P(Z < 0.7) \approx 0.7580$

Uppgift 8:

För att få diagonalens 1:or så långt ner i matrisens högra hörn som möjligt döps tillstånden B och C om till C^* och B^*. Övergångsmatrisen får då följande utseende:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 & 0.1 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rader och kolumner som hör ihop med de absorberande tillstånden stryks. Den stympade övergångsmatrisen betecknas $\mathbf{P}^*$.

$$\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} - \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.7 \\ -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Fortsättning uppgift 8 på nästa sida

Fortsättning uppgift 8

Beräkna inversen $\mathbf{N}^{-1} = \left[\mathbf{E} - \mathbf{P}^{*}\right]^{-1}$

$$\det \mathbf{N} = \det \begin{bmatrix} 0.8 & -0.7 \\ -0.6 & 0.8 \end{bmatrix} = 0.8 \cdot 0.8 - (-0.7)\cdot(-0.6) = 0.22$$

$$\mathbf{N}^{-1} = \frac{1}{0.22} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.7 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.64 & 3.18 \\ 2.73 & 3.64 \end{bmatrix}$$

Medeltid till absorption betingat av start i tillstånd C = 2.73 + 3.64 = 6.37 tidsenheter