

Tentamen LMA 200 Matematisk statistik, 110111

Tentamen består av åtta uppgifter motsvarande totalt 50 poäng. Det krävs minst 20 poäng för betyg 3, minst 30 poäng för 4 och minst 40 för 5.

Examinator: Ulla Blomqvist, ankn 5886

Hjälpmedel: Matematisk statistik, U. Dahlbom, Chalmersgodkänd miniräknare och Tabell- och formelsamling, H. Blomqvist.

Besöker tentamen: c:a kl 9.15 och 11.30

Uppgift 1: Vid tillverkning av en viss typ av enheter kan två slags fel, fel i formationen (A) och missfärgning (B), förekomma hos de tillverkade enheterna. Man vet att $P(A) = 0.01$, $P(B) = 0.02$ och $P(A \cap B) = 0.005$. Beräkna att en tillverkad enhet har:

- a) åtminstone något av felen
- b) felet A men inte B
- c) exakt ett av felen A och B
- d) Är felen oberoende? Motivera!

(6 poäng)

Uppgift 2: De enheter som beskrivs i uppgift 1 får först sin form. Sedan går de vidare till färgning. Om en enhet bara har en av felen så kan den omarbetas om så att den går att sälja som felfri.

- Om enheten har fel form så måste den innan den kan säljas bearbetas så att formen blir korrekt. Sedan måste den också färgas om även om färgen var korrekt från början.
- Om färgen blir defekt så måste enheten färgas om.

Tillverkningskostnaden för en enhet är 150 kr. En felfri enhet säljs vidare för 250 kr. Kostnaden för att omarbeta formen kostar 25 kr och att färga om en enhet 35 kr.

Beräkna väntevärdet och standardavvikelsen för vinsten/tillverkad enhet.

(6 poäng)

Uppgift 3: Anta att bilar, som anländer till en vägtull, kan beskrivas med hjälp av en Poissonfördelning med en genomsnittstakt på 2.6 bilar per minut.

- a) Vad är sannolikheten att det kommer fler än 1 bil under en 20 sekunders period?
- b) Vad är sannolikheten att det går mellan 30 och 45 sekunder mellan två successiva bilars ankomst?

(6 poäng)

Uppgift 4: En kontinuerlig stokastisk variabel sägs vara kontinuerlig rektangelfördelad på intervallet $[a, 3]$ om dess frekvensfunktion är

$$f(x) = 0.5, \text{ om } a \leq x \leq 3, \text{ noll annars.}$$

- a) Bestäm konstanten a.
- b) Bestäm den stokastiska variabelns väntevärde.
- c) Bestäm den stokastiska variabelns varians

(6 poäng)

Uppgift 5: Låt ξ vara antalet erhållna klave vid 100 kast av ett symmetriskt mynt. Beräkna närmevärden för följande sannolikheter:

- a) $P(\xi \leq 40)$
- b) $P(44 < \xi < 55)$
- c) $P(\xi = 52)$

(8 poäng)

Uppgift 6: Följande tabell visar resultatet vid en undersökning, vid vilken man bestämt brottgränsen hos bomullsband:

63	75	61	54	66	74	76
66	73	64	81	70	58	60

Brottgränsen kan antas vara normalfördelad.

- a) Ange ett observerat symmetriskt 95 % konfidensintervall för μ då σ är okänt.
- b) Beräkna ett 99%-igt konfidensintervall för motsvarande standardavvikelse.

(6 poäng)

Uppgift 7: Inför riksdagsvalet i september förra året skulle man ha kunnat göra följande analys. Anta att benägenheten att ändra politisk åsikt mellan vänster- och höger-blocken kan beskrivas av följande övergångsmatrix:

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Låt oss välja ut en person helt slumpmässigt och studera hans/hennes eventuella politiska åsiktsväxlingar mellan blocken under ett antal år (Från vänster till höger alternativt från höger till vänster). Dessa växlingar skulle kunna beskrivas som en Markovkedja.

- a) Hur ser startvektorn ut?
- b) Har detta problem en asymptotisk fördelning? För att få poäng på denna uppgift måste svaret motiveras.

(6 poäng)

Uppgift 8: Anta att man har en process (med tillstånden A, B och C) som kan beskrivas av en Markovkedja i kontinuerlig tid med följande intensitetsmatrix

$$\begin{bmatrix} & 0.5 & 0 \\ 0.4 & & 0.1 \\ 0 & 0.4 & \end{bmatrix}$$

- a) Komplettera de värden i matrisen som saknas.
- b) Hur stor andel av tiden förväntas processen befinna sig i tillstånd A?

(6 poäng)

Lycka till!

Lösningar till tentamen i matematisk statistik, LMA 200, 110111

Uppgift 1: A = fel i formationen B = missfärgning

$$P(A) = 0.01, \quad P(B) = 0.02 \quad P(A \cap B) = 0.005.$$

- d)
- a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.01 + 0.02 - 0.005 = 0.025$
 - b) $P(\text{endast } A) = P(A) - P(A \cap B) = 0.01 - 0.005 = 0.005$
 - c) $P(\text{exakt ett av felen } A \text{ och } B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0.01 + 0.02 - 2 \cdot 0.005 = 0.02$
exakt ett av felen A och B
 - d) $P(A) \cdot P(B) = 0.01 \cdot 0.02 = 0.0002$
 $P(A \cap B) = 0.005$
 $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B) \Leftrightarrow A \text{ och } B \text{ är beroende}$

Uppgift 2: ξ = kostnaden per tillverkad enhet

$\xi = x$	händelsen	$P(\xi = x)$
150	$P(A^C \cap B^C) = 1 - P(A \cup B)$	$1 - 0.025 = 0.975$
185	$P(B) - P(A \cap B)$	$0.02 - 0.005 = 0.015$
210	$P(A)$	0.01

$$\eta = \text{vinsten per tillverkad enhet} \quad \eta = 250 - \xi$$

$$E(\eta) = 250 - E(\xi) = 250 - (150 \cdot 0.975 + 185 \cdot 0.015 + 210 \cdot 0.01) = 98.875$$

$$\text{Var}(\eta) = \text{Var}(\xi) = 150^2 \cdot 0.975 + 185^2 \cdot 0.015 + 210^2 \cdot 0.01 - 98.875^2 = 13115.60938$$

$$S(\eta) = 114.523$$

Uppgift 3: ξ = bilar, som anländer till en vägtull $\xi = \text{Po}(\lambda = 2.6 \text{ bilar/ minut})$

- a) Räkna om λ . $\lambda = 2.6 \text{ bilar/ minut} = 0.865 \text{ bilar/ 20 sekunder}$
 $P(\xi > 1) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) = 1 - e^{-0.865} \left(\frac{0.865^0}{0!} + \frac{0.865^1}{1!} \right) \approx 0.215$

- b) η = tiden mellan två successiva bilar $\eta = \text{Exp}(\lambda)$

$$\text{Räkna om } \lambda. \quad \lambda = 2.6 \text{ bilar/ minut} = 0.0433 \text{ bilar/ sekund}$$

$$P(30 < \eta < 45) = P(\eta < 45) - P(\eta < 30) = 1 - e^{-0.0433 \cdot 45} - (1 - e^{-0.0433 \cdot 30}) \approx 0.13$$

Uppgift 4: ξ är Rektangelfördelad

$f(x) = 0.5$, om $a \leq x \leq 3$, noll annars.

$$a) \quad \int_a^3 0.5 dx = [0.5x]_a^3 = 0.5 \cdot 3 - 0.5a = 1 \Leftrightarrow a = 1$$

b) På grund av symmetrin är $E(\xi) = \text{symmetripunkten} = 2$

$$\text{Var}(\xi) = \int_1^3 x^2 \cdot 0.5 dx - 2^2 = \left[\frac{0.5x^3}{3} \right]_1^3 - 4 \approx (4.5 - 0.1667) - 4 = 0.3333$$

Uppgift 5: ξ = antalet erhållna klave vid 100 kast av ett symmetriskt mynt.

ξ är Bin $(n, p) = \text{Bin}(100, 0.5)$

$np(1-p) = 100 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 25 > 10 \Rightarrow$ använd normalapproximation

$$a) \quad P(\xi \leq 40) = P\left(Z < \frac{40 - 100 \cdot 0.5}{\sqrt{100 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}\right) = P(Z < -2) = 1 - P(Z < 2) \approx 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$b) \quad P(44 < \xi < 55) = P(\xi < 55) - P(\xi < 44) = P\left(Z < \frac{55 - 100 \cdot 0.5}{\sqrt{100 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}\right) - \\ - P\left(Z < \frac{44 - 100 \cdot 0.5}{\sqrt{100 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}\right) = P(Z < 1) - P(Z < -1.2) = P(Z < 1) - (1 - P(Z < 1.2)) = \\ = 0.8413 - (1 - 0.8849) \approx 0.7262$$

$$c) \quad P(\xi = 52) \approx 0$$

Uppgift 6: ξ = brottgränsen ξ är normalfördelad med okänt σ

$$\sum_{i=1}^{14} x_i = 941 \quad \sum_{i=1}^{14} x_i^2 = 64045 \quad n = 14 \Rightarrow df = 13 \Rightarrow t = 2.16$$

$$\bar{x} = \frac{941}{14} \approx 67.21 \quad s = \sqrt{\frac{64045 - \frac{(941)^2}{14}}{14-1}} = \sqrt{\frac{796.357}{13}} \approx 7.827$$

$$a) \quad \bar{x} \pm 2.16 \frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow 67.21 \pm 2.16 \cdot \frac{7.827}{\sqrt{14}} \Rightarrow 67.21 \pm 4.52$$

$$b) \quad \left[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{0.005}^2}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{0.995}^2}} \right] = \left[\sqrt{\frac{796.357}{29.819}}, \sqrt{\frac{796.357}{3.565}} \right] = [5.168 \quad 14.946]$$

Uppgift 7: $P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$

- a) Eftersom vi inte vet om personens åsikt vid periodens början blir startvektorn $p^{(0)} = (0.5 \ 0.5)$
- b) Om det finns en asymptotisk fördelning så finner man den genom att lösa ekvationerna

$$\pi = \pi P \quad \text{d.v.s.} \quad [\pi_1, \pi_2] = [\pi_1, \pi_2] \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \quad \text{där} \quad \pi_1 + \pi_2 = 1$$

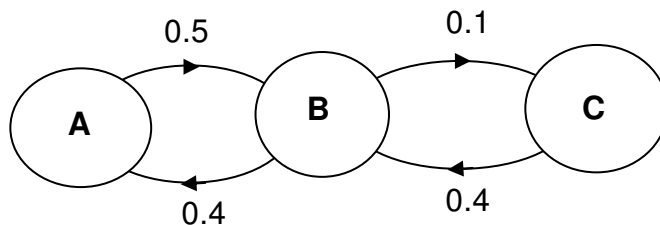
$$\begin{cases} \pi_1 = 0.8\pi_1 + 0.2\pi_2 \\ \pi_2 = 0.2\pi_1 + 0.8\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.2\pi_1 = 0.2\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = 0.5 \\ \pi_2 = 0.5 \end{cases} \quad \text{d.v.s.} \quad \pi = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

Uppgift 8:

- a) Matrisen kompletteras så att radsummorna blir 0.

$$\begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & -0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & -0.4 \end{bmatrix}$$

- b)



$$\pi_B = \frac{0.5}{0.4} \pi_A = \frac{5}{4} \pi_A \quad \pi_C = \frac{0.5 \cdot 0.1}{0.4 \cdot 0.4} \pi_A = \frac{5}{16} \pi_A \quad \text{där} \quad \pi_A + \pi_B + \pi_C = 1 \Rightarrow$$

$$\pi_A + \frac{5}{4} \pi_A + \frac{5}{16} \pi_A = \pi_A \left(1 + \frac{5}{4} + \frac{5}{16} \right) = \pi_A \left(\frac{16+20+5}{16} \right) = \pi_A \left(\frac{41}{16} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \pi_A = \frac{16}{41} \approx 0.3902 \quad \pi_B = \frac{20}{41} \approx 0.4878 \quad \pi_C = \frac{5}{41} \approx 0.1220$$

d.v.s. processen förväntas befinna sig i tillstånd A c:a 39% av tiden.