

Tentamen LMA 200 Matematisk statistik, data/elektro 110319

Tentamen består av åtta uppgifter motsvarande totalt 50 poäng. Det krävs minst 20 poäng för betyg 3, minst 30 poäng för 4 och minst 40 för 5.

Examinator: Ulla Blomqvist, ankn 5886

Hjälpmedel: Tabell- och formelsamling och Chalmersgodkänd miniräknare

Besöker tentamen: c:a kl 15.15 och 17.00

Lycka till!

Uppgift 1: Man har 2 urnor. I den ena finns 2 vita och 3 svarta kulor. I den andra finns en vit och en svart kula. Man flyttar en slumpmässigt vald kula från den första urnan till den andra utan att notera dess färg.

- a) Om man drar en kula från den andra urnan, vad är då sannolikheten att den är vit?
- b) Man drar en kula från den andra urnan och finner att den är vit. Vad är den betingade sannolikheten för att den flyttade kulan var svart?

(6 poäng)

Uppgift 2: Vid ett konstruktionsarbete kan tiden med vilken arbetet kan försenas betraktas som en diskret stokastisk variabel med följande sannolikhetsfördelning:

$\xi = x$ (i dagar)	1	2	3	4
$P(\xi = x)$	0.5	0.3	0.1	0.1

- a) Bestäm väntevärde och varians för det antal dagar som arbetet kan försenas.
- b) Ett företag håller just nu på med 10 sådana konstruktionsarbeten. Vad är sannolikheten att högst 2 av dem blir försenade med 4 dagar. Anta att längden av tiderna för konstruktionsarbetena är oberoende av varandra.

(6 poäng)

Uppgift 3: Anta att vi studerar födelsedagarna hos ett antal slumpmässigt utvalda personer.

- a) En grupp består bara av 5 personer. Vad är sannolikheten att alla 5 har olika födelsedagar.
- b) En annan grupp består av 100 personer. Bestäm sannolikheten att exakt 2 av dem är födda den 1 januari.

(6 poäng)

Uppgift 4: Man har två reläer som är inställda för utlösning 1.0 respektive 1.5 sekund efter en impuls. Utlösningstiderna är $N(1.0, 0.1)$ respektive $N(1.5, 0.2)$ och oberoende. Bestäm sannolikheten för att det andra reläet utlöses före det första om de samtidigt utsätts för en impuls.

(6 poäng)

Uppgift 5: Livslängden för en viss typ av elektronrör är exponentialfördelad med $\lambda=0.005$. Ett sådant rör ingår i en radarutrustning som ständigt är i bruk på ett fartyg. När ett sådant rör går sönder byts det genast ut mot ett nytt. Om man har 50 sådana elektronrör i lager på fartyget, beräkna en tid T sådant att lagret räcker åtminstone denna tid med sannolikheten 0.1. Livslängden för olika rör är oberoende.

(6 poäng)

Uppgift 6: Vid en undersökning av alkohols inverkan på reaktionstiden på 6 slumpmässigt utvalda personer fick man följande resultat (tid i sekunder):

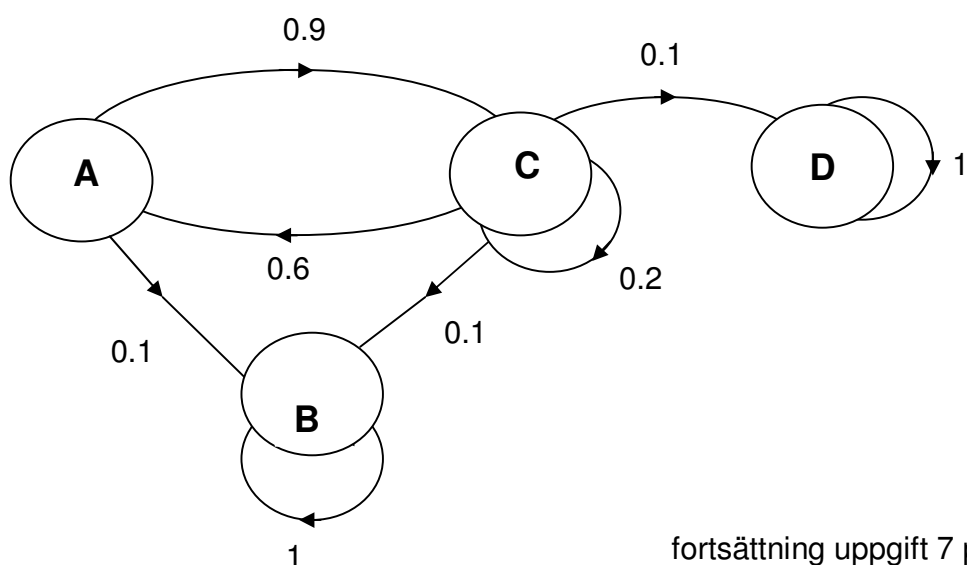
Person	före alkohol	efter alkohol	skillnad
A	0.15	0.55	0.40
B	0.10	0.60	0.50
C	0.10	1.00	0.90
D	0.25	0.55	0.30
E	0.25	0.50	0.25
F	0.10	0.35	0.25

Anta att reaktionstiderna före och efter alkohol är normalfördelade.

- Beräkna ett 95%-igt konfidensintervall för den genomsnittliga skillnaden mellan reaktionstiderna före och efter alkohol.
- Tyder denna undersökning på att alkohol påverkar reaktionstiden? Du måste motivera ditt svar för att få poäng.
- Beräkna ett 95%-igt ensidigt uppåt begränsat konfidensintervall för motsvarande standardavvikelse.

(6 poäng)

Uppgift 7: Anta att man har en Markovkedja i diskret tid som kan illustreras med nedanstående flödesdiagram



fortsättning uppgift 7 på nästa sida

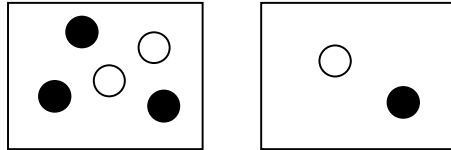
fortsättning uppgift 7

- a) Anta att man startar processen i tillstånd **A**. Vad är sannolikheten att komma tillbaka till tillstånd **A** (för första gången efter man lämnat **A**).
- b) Hur många steg förväntas det ta fram till absorption om man börjar i tillstånd **A**?
(8 poäng)

Uppgift 8: Anta att ett företag har 2 maskiner som arbetar parallellt oberoende av varandra. Var och en går sönder med intensiteten 0.1. Så fort en maskin går sönder påbörjas reparationen. En serviceman reparerar en maskin med intensiteten 0.4. Två servicemän kan inte arbeta samtidigt på samma maskin. När maskinerna är hela har en serviceman inget annat arbete som väntar. En serviceman kostar företaget 1000 kronor/timme. Vilken timkostnad måste företaget ha för en stillastående maskin för att det skall löna sig att anställa 2 servicemän som kan reparera de 2 maskinerna?
(6 poäng)

Lösningar till tentamen i matematisk statistik, LMA200, 20110319

Uppgift 1:



A = Den dragna kulan från urna 1 är vit $P(A) = \frac{3}{5}$

A^C = Den dragna kulan från urna 1 är svart $P(A^C) = \frac{2}{5}$

B = Den dragna kulan från urna 2 är vit

$$P(A \cap B) = P(B | A) \cdot P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{15}$$

$$P(A^C \cap B) = P(B | A^C) \cdot P(A^C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

	A	A^C	
B	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{6}{15}$
B^C	$\frac{5}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{8}{15}$
	$\frac{9}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

a) $P(B) = \frac{6}{15} \approx 0.4$

b) $P(A^C | B) = \frac{P(A^C \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{6}{15}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.33$

Uppgift 2: ξ = antal dagar som ett arbete blir försenat.

a) $E(\xi) = \sum_{\Omega} x_i \cdot P(\xi = x_i) = 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.1 = 1.8$

$$\text{Var}(\xi) = \sum_{\Omega} x_i^2 \cdot P(\xi = x_i) - [E(\xi)]^2 = 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.1 + 4^2 \cdot 0.1 - 1.8^2 = 0.96$$

b) η = antal arbeten som blir försenat med 4 dagar η är $\text{Bin}(n, p) = \text{Bin}(10, 0.1)$

$$P(\eta \leq 2) = \binom{10}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^{10} + \binom{10}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^9 + \binom{10}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^8 \approx 0.93$$

Uppgift 3: Man brukar räkna med att ett år har 365 dagar.

a) $P(\text{alla har olika födelsedagar}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot 361}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot 365} \approx 0.973$

b) ξ = antal personer som har födelsedag den 1 januari

ξ är $\text{Bin}(n, p) = \text{Bin}(100, \frac{1}{365})$

$$P(\xi = 2) = \binom{100}{2} \left(\frac{1}{365}\right)^2 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{98} \approx 0.0284$$

Uppgift 4: ξ = Utlösningstiden för relä 1 ξ är $N(\mu, \sigma) = N(1.0, 0.1)$

η = Utlösningstiden för relä 2 η är $N(\mu, \sigma) = N(1.5, 0.2)$

Beräkna $P(\eta < \xi) = P(\eta - \xi < 0)$

Bilda en ny stokastisk variabel $\zeta = \eta - \xi$

$$E(\zeta) = E(\eta) - E(\xi) = 1.5 - 1.0 = 0.5$$

$$\text{Var}(\zeta) = \text{Var}(\eta) + \text{Var}(\xi) = 0.2^2 + 0.1^2 = 0.05$$

$$P(\zeta < 0) = P\left(Z < \frac{0 - 0.5}{\sqrt{0.05}}\right) = P(Z < -2.24) = 1 - P(Z < 2.24) \approx 1 - 0.9875 = 0.0125$$

Uppgift 5: ξ = Livslängden för en viss typ av elektronrör ξ är $\text{Exp}(\lambda) = \text{Exp}(0.005)$

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{50}$$

$$E(\eta) = n \cdot \frac{1}{\lambda} = 50 \cdot \frac{1}{0.005} = 10\,000 \qquad \text{Var}(\eta) = n \cdot \frac{1}{\lambda^2} = 50 \cdot \frac{1}{0.005^2} = 2\,000\,000$$

$$P(\eta > T) = 0.1 \Leftrightarrow P(\eta < T) = 0.9$$

$$P(\eta < T) = P\left(Z < \frac{T - 10\,000}{\sqrt{2\,000\,000}}\right) = 0.9$$

$$\text{Tabellen ger } P(Z < 1.28) = 0.9 \Rightarrow \frac{T - 10\,000}{\sqrt{2\,000\,000}} = 1.28 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T = 10\,000 + 1.28 \cdot \sqrt{2\,000\,000} \approx 11\,810.2 \text{ tidsenheter}$$

Uppgift 6: x = skillnaden mellan reaktionstiderna före och efter alkohol

$$n = 6 \Rightarrow 3 \text{ df}$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 0.40 + 0.50 + 0.90 + 0.30 + 0.25 + 0.25 = 2.6$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i^2 = 0.40^2 + 0.50^2 + 0.90^2 + 0.30^2 + 0.25^2 + 0.25^2 = 1.435$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{2.6}{6} \approx 0.433$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{1.435 - \frac{2.6^2}{6}}{6-1}} = \sqrt{0.061667} \approx 0.248$$

a) Ett 95%-igt konfidensintervall för $\mu \Rightarrow t = 2.57$

$$\bar{x} \pm t \frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.433 \pm 2.57 \cdot \frac{0.248}{\sqrt{6}} \Rightarrow 0.433 \pm 0.260 \Rightarrow [0.173, 0.693]$$

b) Ett 95%-igt konfidensintervall bygger på en metod som i 95 fall av 100 ger ett intervall som täcker över det sanna värdet. Eftersom skillnaden = 0 inte täcks över av intervallet så tyder undersökningen på att reaktionstiden påverkas av alkohol.

c) Ett 95%-igt ensidigt uppåt begränsat konfidensintervall för σ :

$$\left[0, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{0.95}^2}}\right] = \left[0, \sqrt{\frac{(6-1)0.061667}{1.145}}\right] \approx [0, 0.519]$$

Uppgift 7:

a) Tillbaka till A

$$\text{efter 1 steg: } f_{AA}^{(1)} = P(\text{kvar i A}) = 0$$

$$\text{efter 2 steg: } f_{AA}^{(2)} = P(A \rightarrow C \rightarrow A) = 0.9 \cdot 0.6$$

$$\text{efter 3 steg: } f_{AA}^{(3)} = P(A \rightarrow C \rightarrow C \rightarrow A) = 0.9 \cdot 0.2 \cdot 0.6$$

$$\text{efter 4 steg: } f_{AA}^{(4)} = P(A \rightarrow C \rightarrow C \rightarrow C \rightarrow A) = 0.9 \cdot 0.2^2 \cdot 0.6$$

$$\text{efter n steg: } f_{AA}^{(n)} = 0.9 \cdot 0.2^{n-2} \cdot 0.6$$

fortsättning uppgift 7a på nästa sida

fortsättning uppgift 7a

Summan av en geometrisk serie fås med hjälp av följande formel:

$$\frac{\boxed{\text{första värdet i serien}}}{1 - \boxed{\text{kvoten mellan två närliggande värden i serien}}}$$

Första värdet = 0.2 och kvoten mellan två närliggande värden = 0.2

$$\begin{aligned} f_{AA} &= \sum_{t=1}^{\infty} f_{AA}^{(t)} = f_{AA}^{(1)} + f_{AA}^{(2)} + f_{AA}^{(3)} + \dots = \\ &= 0 + 0.9 \cdot 0.6 + 0.9 \cdot 0.2 \cdot 0.6 + 0.9 \cdot 0.2^2 \cdot 0.6 + \dots = \\ &= 0.9 \cdot 0.6 + 0.9 \cdot 0.6 (0.2 + 0.2^2 + \dots) = \\ &= 0.54 + 0.54 \cdot \frac{0.2}{1-0.2} = 0.675 \end{aligned}$$

Alltså, om vi startar i A så har vi 67.5%:s chans att komma tillbaka till A.

- b) För att få diagonalens 1:or så långt ner i matrisens högra hörn som möjligt döps tillstånden B och C om till C^* och B^* . Övergångsmatrisen får då följande utseende:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Rader och kolumner som hör ihop med de absorberande tillstånden stryks. Den stympade övergångsmatrisen betecknas $\mathbf{P}^*$.

$$\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Fortsättning uppgift 7b på nästa sida

Fortsättning uppgift 7b

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} - \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0.9 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.9 \\ -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

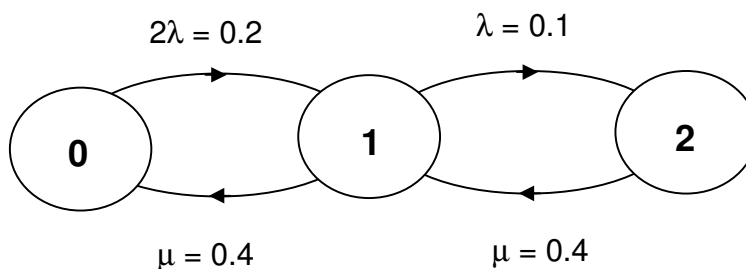
Beräkna inversen $\mathbf{N}^{-1} = [\mathbf{E} - \mathbf{P}^*]^{-1}$

$$\det \mathbf{N} = \det \begin{bmatrix} 1 & -0.9 \\ -0.6 & 0.8 \end{bmatrix} = 1 \cdot 0.8 - (-0.6) \cdot (-0.9) = 0.26$$

$$\mathbf{N}^{-1} = \frac{1}{0.26} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.08 & 3.46 \\ 2.31 & 3.85 \end{bmatrix}$$

Medeltid till absorption betingat av start i tillstånd A = $3.08 + 3.46 = 6.54$ tidsenheter

Uppgift 8: Vi börjar att beräkna timkostnaden när en reparatör är anställd. Denna situation kan illustreras med hjälp av nedanstående diagram. Tillstånden anger antal trasiga maskiner.



$$\pi_1 = \frac{0.2}{0.4} \pi_0 = \frac{1}{2} \pi_0 \quad \pi_2 = \frac{0.2 \cdot 0.1}{0.4 \cdot 0.4} \pi_0 = \frac{1}{8} \pi_0 \quad \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \Rightarrow$$

$$\pi_0 + \frac{1}{2} \pi_0 + \frac{1}{8} \pi_0 = \pi_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) = \pi_0 \frac{13}{8} = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{8}{13} \Rightarrow$$

$$\pi_1 = \frac{1}{2} \pi_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{13} = \frac{4}{13} \quad \pi_2 = \frac{1}{8} \pi_0 = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{13} = \frac{1}{13}$$

Alltså, den asymptotiska tillståndsvektorn blir $\boldsymbol{\pi} = \left[\frac{8}{13}, \frac{4}{13}, \frac{1}{13} \right]$

Fortsättning uppgift 8 på nästa sida

Fortsättning uppgift 8

Sannolikhetsfördelningen för kostnaden per timme för stillastående maskiner:

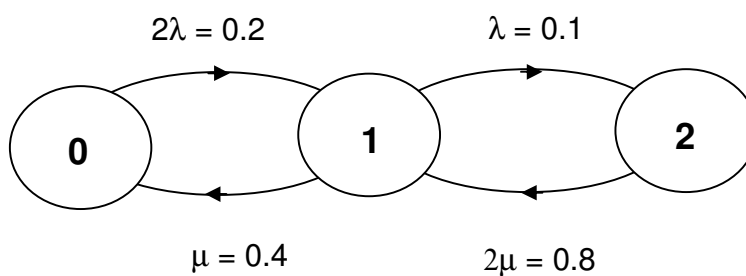
Antal stillastående maskiner	Kostnad	Sannolikhet
0	0	$\frac{8}{13}$
1	X	$\frac{4}{13}$
2	2X	$\frac{1}{13}$

Förväntad timkostnad för stillastående maskiner:

$$0 \cdot \frac{8}{13} + X \cdot \frac{4}{13} + 2X \cdot \frac{1}{13} = \frac{6}{13}X$$

Timkostnad för maskiner och en reparatör = $\frac{6}{13}X + 1000$:-

Vi fortsätter med att beräkna timkostnaden när två reparatörer är anställda. Tillstånden anger antal trasiga maskiner.



$$\pi_1 = \frac{0.2}{0.4} \pi_0 = \frac{1}{2} \pi_0 \quad \pi_2 = \frac{0.2 \cdot 0.1}{0.4 \cdot 0.8} \pi_0 = \frac{1}{16} \pi_0 \quad \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\pi_0 + \frac{1}{2} \pi_0 + \frac{1}{16} \pi_0 = \pi_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \right) = \pi_0 \frac{25}{16} = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = \frac{16}{25} \quad \Rightarrow$$

Fortsättning uppgift 8 på nästa sida

Fortsättning uppgift 8

$$\pi_1 = \frac{1}{2} \pi_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{25} = \frac{8}{25}$$

$$\pi_2 = \frac{1}{16} \pi_0 = \frac{1}{16} \cdot \frac{16}{25} = \frac{1}{25}$$

Alltså, den asymptotiska tillståndsvektorn $\pi = [\frac{16}{25}, \frac{8}{25}, \frac{1}{25}]$

Sannolikhetsfördelningen för kostnaden per timme för stillastående maskiner:

Antal stillastående maskiner	Kostnad	Sannolikhet
0	0	$\frac{16}{25}$
1	X	$\frac{8}{25}$
2	2X	$\frac{1}{25}$

Förväntad timkostnad för stillastående maskiner:

$$0 \cdot \frac{16}{25} + X \cdot \frac{8}{25} + 2X \cdot \frac{1}{25} = \frac{10}{25}X$$

Timkostnad för maskiner och två reparatörer = $\frac{10}{25}X + 2 \cdot 1000:--$

Det är billigare att anställa två reparatörer än en om

$$\frac{10}{25}X + 2 \cdot 1000:-- < \frac{6}{13}X + 1000:-- \Leftrightarrow X > 16250:--$$

d.v.s. om kostnaden för en trasig maskin kostar företaget mer än 16 250 kronor/timme så lönar det sig med 2 reparatörer i förhållande till en.