

Matematisk statistik, LMA 200, för DAI och EI den 25 aug 2011

Tentamen består av åtta uppgifter om totalt 50 poäng. Det krävs minst 20 poäng för betyg 3, minst 30 poäng för 4 och minst 40 för 5.

Examinator: Ulla Blomqvist

Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare och Håkan Blomqvists formelsamling.

Lycka till!

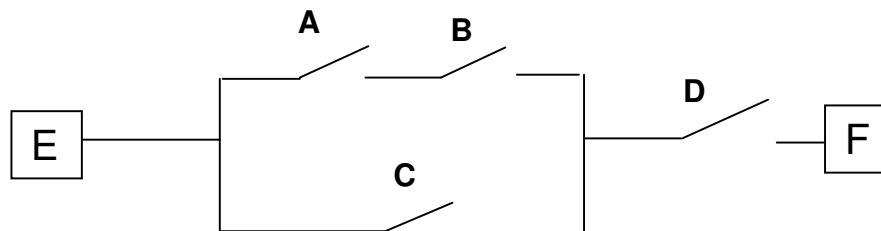
Uppgift 1: Anta att man har två händelser A och B. För dessa gäller att $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.2$ och $P(B | A) = 0.3$.

a) Fyll i en fyrfältstabell.

b) Beräkna $P(A^C | B)$.

(6 poäng)

Uppgift 2: Anta att reläerna A, B, C och D slutes med sannolikheterna 0.2, 0.6, 0.3 och 0.9. Händelserna att reläerna slutes är oberoende. Hur stor är sannolikheten att det blir kontakt mellan punkterna E och F?



(5 poäng)

Uppgift 3: Anta att man har 2 stokastiska variabler, ξ och η . Sannolikhetsfördelningen för ξ beskrivs i nedanstående tabell:

$\xi = x$	$P(\xi = x)$
0	0.3
1	0.4
2	0.2
3	0.1

Den stokastiska variabeln η kan beräknas med hjälp av sambandet $\eta = 2 + 4\xi + 4\xi^2$.

a) Beräkna väntevärdet och standardavvikelsen av ξ .

b) Beräkna sannolikhetsfördelningen för η .

(6 poäng)

Uppgift 4: Vid en kvalitetskontroll har man ett kolli med 100 reservdelar. Ur kollit tar man ett slumpmässigt urval på 10 delar. Anta att hela kollit innehåller 5 defekta delar (fast det vet ju inte de som genomför kontrollen).

- Beräkna sannolikheten att urvalet inte innehåller någon defekt reservdel.
- Beräkna väntevärde och varians för antal defekta reservdelar i urvalet.

(6 poäng)

Uppgift 5: I en vägkorsning kan antal bilar som passerar antas vara Poissonfördelat med en genomsnittlig passeringsfrekvens av 5 bilar på 15 minuter.

- Vad är sannolikheten att det kommer minst 2 bilar till korsningen under en 5-minuters period?
- Anta att en bil just har passerat korsningen. Beräkna sannolikheten att det tar kortare tid än 2 minuter innan nästa bil kommer.

(6 poäng)

Uppgift 6: Vikten på en viss sorts marmeladburk kan antas vara normalfördelad med $\mu = 250$ gram och $\sigma = 5$ gram.

- Beräkna sannolikheten att en slumpmässigt vald burk väger mindre än 245 gram.
- En liten servicebutik köper in 10 sådana marmeladburkar. Vad är sannolikheten att åtminstone två av dessa burkar väger mindre än 245 gram?

(6 poäng)

Uppgift 7: Anta att vikten av en viss sorts byggsten är normalfördelad med $\mu = 5$ kg och $\sigma = 0.5$ kg. På en släpkärra har man lastat 100 sådana stenar. Släpkärran klarar en last på 500 kg.

- Vad är sannolikheten att man får överlast om man lastar 100 stenar på kärran?
- Hur stor är sannolikheten att vikten av lasten överstiger 501 kg?
- Hur många stenar kan man lasta på kärran för att risken för överlast skall bli större än 0.90?

(8 poäng)

Uppgift 8: I läroboken om Markovkedjor står beskrivet ett klassiskt problem kallat "Ehrenfests diffusionsmodell". Där studerar man två urnor, A och B. Vid starten $t=0$ finns två kulor i varje urna. En kula väljs slumpmässigt ur en urna vid tidpunkten $t=1$. Kulan flyttas över till den andra urnan. (Observera att man inte väljer urnan slumpmässigt utan en kula). Vid tidpunkt $t=2$ väljer man åter en kula slumpmässigt och flyttar över den till den andra urnan. Detta fortsätter i evighet. Låt " i " betyda antal kulor i urna A. Processen kan då beskrivas av en Markovkedja med de fem tillstånden E_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

- Bestäm övergångsmatrisen.
- Ange startvektorn.
- Beräkna sannolikheten att kedjan befinner sig i tillstånd E_1 efter ett steg och efter två steg, d.v.s. att det finns en kula i urna A efter ett respektive två steg.

(7 poäng)

Lösningar till Matematik statistik, LMA200, för DAI och EI, 2011-08-25

Uppgift 1: $P(A) = 0.6$ $P(B) = 0.2$ $P(B | A) = 0.3$

a) $P(A \cap B) = P(B | A) \cdot P(A) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$

	A	A ^c	
B	0.18	0.02	0.2
B ^c	0.42	0.38	0.8
	0.6	0.4	1.00

b) Beräkna : $P(A^c | B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{0.02}{0.2} = 0.1$

Uppgift 2: Statistiskt oberoende innebär att $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Kontakt mellan E och F fås om

(övre slingan slutes $\cup$ undre slingan slutes) $\cap$ D slutes

Den övre slingan slutes med sannolikheten $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.2 \cdot 0.6 = 0.12$

Alltså,

$$P(\text{Från E till F}) = P(\text{övre slingan slutes} \cup \text{undre slingan slutes}) \cdot P(D \text{ slutes}) =$$

$$= (\text{additionssatsen}) = (0.12 + 0.3 - 0.12 \cdot 0.3) \cdot 0.9 = 0.3456$$

Uppgift 3

a) $E(\xi) = \sum_{i=0}^3 x_i \cdot P(\xi = x_i) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.1 = 1.1$

$$\text{Var}(\xi) = \sum_{i=0}^3 x_i^2 \cdot P(\xi = x_i) - (E(\xi))^2 = 0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.4 + 2^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.1 - 1.1^2 = 0.89$$

$$S(\xi) = \sqrt{0.89} = 0.943$$

Fortsättning uppgift 3 på nästa sida

Fortsättning uppgift 3

b)

$\xi = x$	$\eta = 2 + 4\xi + 4\xi^2 = y$	$P(\xi = x) = P(\eta = y)$
0	$2 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0^2 = 2$	0.3
1	$2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1^2 = 10$	0.4
2	$2 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 = 26$	0.2
3	$2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 = 50$	0.1

Alltså sannolikhetsfördelningen för η blir

$\eta = y$	$P(\eta = y)$
2	0.3
10	0.4
26	0.2
50	0.1

Uppgift 4: ξ = antal defekta enheter $\xi = \text{Hyp}(N, n, Np) = \text{Hyp}(100, 10, 5)$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P(\xi = 0) &= \frac{\binom{5}{0} \binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} = \frac{1 \cdot \frac{95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92 \cdot 91 \cdot 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{\cancel{10!}}}{\frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92 \cdot 91}{\cancel{10!}}} = \\
 &= \frac{\cancel{95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92 \cdot 91} \cdot 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot \cancel{95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92 \cdot 91}} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96} \approx 0.58
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } E(\xi) &= n \cdot p = 10 \cdot \frac{5}{100} = 0.5 \\
 \text{Var}(\xi) &= n \cdot p \cdot (1 - p) \cdot \frac{N - n}{N - 1} = 10 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{95}{100} \cdot \frac{100 - 10}{100 - 1} = \frac{19}{44}
 \end{aligned}$$

Uppgift 5: ξ = antal bilar $\xi = \text{Po}(\lambda = 5 \text{ bilar/15 min})$

a) Räkna om λ till antal bilar/ 5 minuter. $\lambda = 1.667 \text{ bilar/ 5 min}$

$$P(\xi \geq 2) = 1 - P(\xi \leq 1) = 1 - e^{-1.667} \cdot \left(\frac{1.667^0}{0!} + \frac{1.667^1}{1!} \right) \approx 1 - 0.504 = 0.496$$

b) η = tiden mellan två bilar

Räkna om λ till antal bilar/ minuter. $\lambda = 0.333 \text{ bil/ min}$

$\eta = \text{Exp}(\lambda = 0.333 \text{ bilar/ min})$

$$P(\xi < 2) = 1 - e^{-0.333 \cdot 2} \approx 0.487$$

Uppgift 6: ξ = vikten på en marmeladburk $\xi = N(\mu, \sigma) = N(250, 5)$ gram

a) $P(\xi < 245) = P(Z < \frac{245-250}{5}) = P(Z < -1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587$

b) η = antal burkar som uppfyller villkoret i a-uppgiften
 $\eta = \text{Bin}(n, p) = \text{Bin}(10, 0.1587)$

$$\begin{aligned} P(\eta \geq 2) &= 1 - (P(\eta = 0) + P(\eta = 1)) = \\ 1 - \binom{10}{0} 0.1587^0 \cdot (1-0.1587)^{10} - \binom{10}{1} 0.1587^1 \cdot (1-0.1587)^9 &\approx \\ 1 - 0.541 &= 0.487 \end{aligned}$$

Uppgift 7: ξ = vikten hos en viss sorts sten $\xi = N(\mu, \sigma) = N(5, 0.5)$ kg

a) η = vikten hos 100 stenar $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{100}$

$$E(\eta) = E(\xi_1) + E(\xi_2) + \dots + E(\xi_{100}) = 100 \cdot 5 = 500 \text{ kg}$$

$$\text{Var}(\eta) = \text{Var}(\xi_1) + \dots + \text{Var}(\xi_{100}) = 100 \cdot 0.5^2 = 25 \text{ kg}^2$$

Eftersom normalfördelningen är symmetrisk kring sitt väntevärde så gäller att

$$P(\eta > 500) = P(\eta > E(\eta)) = 0.5$$

b) $P(\eta \geq 501) = 1 - P(\eta < 501) = 1 - P(Z < \frac{501-500}{5}) = 1 - P(Z < 0.2) =$
 $= 1 - 0.5793 = 0.4207$

c) Anta att man behöver n stenar

$$v = \text{vikten hos } n \text{ stenar} \quad v = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

$$E(v) = E(\xi_1) + E(\xi_2) + \dots + E(\xi_n) = n \cdot 5 \text{ kg}$$

$$\text{Var}(v) = \text{Var}(\xi_1) + \dots + \text{Var}(\xi_n) = n \cdot 0.5^2 \text{ kg}^2$$

$$P(v > 500) > 0.90 \Leftrightarrow P(v < 500) < 0.10$$

Lös först problemet för $P(v < 500) = 0.10$

$$P(v < 500) = P(Z < \frac{500-n \cdot 5}{\sqrt{n} \cdot 0.5}) = 0.10$$

$$\text{Tabellen ger att } P(Z < 1.28) = 0.90 \Leftrightarrow P(Z < -1.28) = 0.10$$

Alltså gäller att

$$\frac{500-n \cdot 5}{\sqrt{n} \cdot 0.5} = -1.28 \Leftrightarrow 500 - 5n = -1.28 \cdot 0.5 \cdot \sqrt{n} \Leftrightarrow n - 0.128 \cdot \sqrt{n} - 100 = 0$$

Fortsättning uppgift 7 på nästa sida

Fortsättning uppgift 7

Sätt $t = \sqrt{n}$ och lös andragradsekvationen $t^2 - 0.128t - 100 = 0$ (OBS! $t \geq 0$)

$$t = \frac{0.128}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0.128}{2}\right)^2 + 100} \quad \Leftrightarrow \quad t = 0.064 \pm \sqrt{(0.064)^2 + 100}$$

$$t_1 \approx 0.064 + 10.0002 = 10.0642 \quad \text{och} \quad (t_2 \approx 0.064 - 10.0002 = -9.9362)$$

$$n \approx (t_1)^2 = 101.288$$

Eftersom $P(v < 500) < 0.10$ så avrundas svaret uppåt, d.v.s. $n \geq 102$

Uppgift 8: Man startar med 2 kulor i varje urna. En kula väljs slumpmässigt. Det betyder att varje kula har sannolikheten $1/4$ att bli vald.

Studera antal kulor i urna A.

Det finns 2 kulor i urna B. Sannolikheten att välja en kula från urna B är $2/4$, d.v.s. sannolikheten att ta en kula från urna B och lägga i urna A är $2/4$. Detta medför att urna A har 3 kulor och urna B har 1 kula.

Det finns nu 1 kula i urna B. Sannolikheten att välja en kula från urna B och lägga den i urna A är $1/4$. Urna A har nu 4 kulor och urna B har 0 kulor.

Sannolikheten att välja en kula från urna A och lägga i urna B blir nu 1. Urna A har nu 3 kulor och urna B har 1 kula.

På motsvarande sätt kan man få fram att urna A har 1 respektive 0 kulor.

a) Övergångsmatrisen: $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) Man börjar med 2 kulor i varje urna. Det ger startvektorn $\mathbf{p}^{(0)} = [0, 0, 1, 0, 0]$

fortsättning uppgift 8 på nästa sida

fortsättning uppgift 8

$$\text{c) } \mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P} = [0, 0, 1, 0, 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0]$$

Sannolikheten att befinna sig i tillstånd E_1 , d.v.s. att urna A innehåller 1 kula efter ett steg = $\frac{1}{2}$

$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(1)} \mathbf{P} = [0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [\frac{1}{8}, 0, \frac{6}{8}, 0, \frac{1}{8}]$$

Sannolikheten att befinna sig i tillstånd E_1 , d.v.s. att urna A innehåller 1 kula efter två steg = 0