

Veckoblad 4

Kapitel 4 i Matematisk statistik, Dahlbom U.

Nya begrepp: Kontinuerlig stokastisk variabel, frekvensfunktion $f(x)$, fördelningsfunktion $F(x)$, väntevärde, varians, de olika standardfördelningarna (rektangel-, exponential- och normalfördelning).

Övningar att räkna: 4.1 (inte e-uppgiften), 4.3 – 4.5, 4.6a, 4.7 – 4.9, 4.12, 4.13, 4.15, 4.18, 4.19, 4.21, 4.26

Snabbrepetition:

1. Fördelningen för en s.v. kan anges genom att man anger frekvensfunktionen eller fördelningsfunktionen eller genom att man helt enkelt säger att exempelvis ξ är exponentialfördelad.
2. Allmänt för kontinuerliga fördelningar:

Två villkor skall vara uppfyllda för att $f(x)$ skall vara en frekvensfunktion:

1) $f(x) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Fördelningsfunktion: $F(x) = P(\xi \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

$$P(\xi > x) = \int_x^{\infty} f(t) dt = 1 - F(x)$$

$$P(a < \xi \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\text{Väntevärde: } E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$\text{Varians: } \text{Var}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - [E(\xi)]^2$$

Om ξ är en kontinuerlig stokastisk variabel med frekvensfunktionen $f(x)$, då gäller för varje reellvärd funktion g att

$$E[g(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx$$

3. För en kontinuerlig stokastisk variabel ξ gäller alltid $P(\xi = a) = 0$. Se sid. 101

Gammalt tentamenstal: (Ekonomi och produktion/Maskin 111214):

En dator uppgraderas med ett nytt operativsystem. Ändringen av tiden, i sekunder, att koppla upp sig mot Internet kan beskrivas av nedanstående frekvensfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} c e^{-6x} & x \geq 0 \\ -c x & -1 < x \leq 0 \\ 0 & x \leq -1 \end{cases}$$

- Bestäm konstanten c .
- Bestäm fördelningsfunktionen
- Vad är sannolikheten att uppkopplingstiden med hjälp av den nya systemet förändras med minst en halv sekund?

(8 p)

- Om vi låter ξ vara väntetiden när vi kommer till ett rödljus, så är väntetiden ξ i verkligheten varken diskret eller kontinuerlig. Vi har ju en positiv sannolikhet att väntetiden blir noll om vi kommer när vagnen står inne.
- Med ett intervall $|x - a| \leq \delta$ menas intervallet $[a - \delta, a + \delta]$ eller $a - \delta \leq x \leq a + \delta$. I situationer när vi studerar mätvärden säger vi ofta lite slarvigt $x = a \pm \delta$.
- Med vanliga beteckningar gäller alltid: $E\left[\frac{\xi - \mu}{\sigma}\right] = 0$ samt $\text{Var}\left[\frac{\xi - \mu}{\sigma}\right] = 1$.
 $\frac{\xi - \mu}{\sigma}$ kallas den normerade variabeln. Om dessutom ξ är $N[\mu, \sigma]$ så är $\frac{\xi - \mu}{\sigma}$ normalfördelad; $N[0, 1]$.
- Rektangelfördelning: ξ är $R(a, b)$

$$\text{Frekvensfunktion: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

$$\text{Fördelningsfunktion: } F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

$$\text{Väntevärde: } E(\xi) = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{Varians: } \text{Var}(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

8. Exponentialfördelning: ξ är $\text{Exp}(\lambda)$

$$\text{Frekvensfunktion: } f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Fördelningsfunktion: } F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Väntevärde: } E(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Varians: } \text{Var}(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Gammalt tentamenstal: (Bygg 991022):

En utrustning består av tre delar, vars livslängder mätt i år, är exponentialfördelade med parametrarna $\lambda_1=0.5$, $\lambda_2=0.5$ och $\lambda_3=1$. Alla tre delarna, som fungerar oberoende av varandra, måste fungera för att hela systemet skall fungera. Vad är sannolikheten att systemet fungerar efter 0.5 år?

(6 p)

9. I en Poissonprocess där det inträffar händelser i tiden (ex. vis. bilar anländer) är tidsintervallen mellan händelserna oberoende och exponentialfördelade.

Gammalt tentamenstal (Kemi 041216):

Till en telefonväxel kommer det i genomsnitt 30 samtal per timme. Anta att antalet telefonsamtal är Poissonfördelat.

- a) Vad är sannolikheten att det inte kommer något samtal under en 3-minuters period?
- b) Vad är sannolikheten att det kommer fler än 2 samtal under en 5 minuters period?
- c) Anta att ett samtal just har kommit in till telefonväxeln. Beräkna sannolikheten att det tar längre tid än 2 minuter innan nästa samtal kommer.

(7 poäng)

10. Normalfördelningen: ξ är $N(\mu, \sigma)$

$$\text{Fördelningsfunktion för den normerade normalfördelningen: } \Phi(z) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\text{Väntevärde: } E(\xi) = \mu$$

$$\text{Varians: } \text{Var}(\xi) = \sigma^2$$

Gammalt tentamenstal (Bygg 991022):

En maskin fyller burkar med soppa. Av erfarenhet vet man att vikten varierar från burk till burk. Antag att vikten kan betraktas som en normalfördelad variabel med standardavvikelsen 20 gram. Vilket medelvärde m bör man inrikta sig på om i det långa loppet 99% av burkarna skall väga minst 740 g.

(6 p)