

Tentamen i Tillämpad matematisk statistik för MI3 och EPI2
den 15 december 2010

Uppgift 1: Ett företag som tillverkar batterier av en viss typ har tillverkning förlagd till två olika fabriker. Fabrik A står för 70% av tillverkningen och fabrik B för 30%. Man vet att ett batteri från fabrik A har 95% sannolikhet att räcka längre än 10 driftstimmar. Motsvarande sannolikhet för batterier från fabrik B är 98%.

- a) Fyll i ovanstående värden i en fyrfältstabell.
- b) Vad är sannolikheten att ett batteri som tas på måfå ur lagret skall räcka längre än 10 driftstimmar?
- c) Man tar ett batteri ur lagret på måfå. Man finner att det räcker längre än 10 driftstimmar. Vad är sannolikheten att det är tillverkat i fabrik A?

(6 poäng)

Uppgift 2: Antal brandlarm under ett dygn vid en viss brandstation kan antas vara Poissonfördelat med parametern $\lambda = 0.52$.

- a) Hur stor är sannolikheten att det blir fler än 2 larm på ett dygn?
- b) Hur stor är sannolikheten att det under en 30 dygns period skulle komma fler än 25 larm?

(6 poäng)

Uppgift 3: Vid en kvalitetskontroll av säkringar upptäcker man att "antal säkringar som går sönder inom en viss tidsperiod" kan beskrivas av en Poissonprocess med i genomsnitt 1 trasig säkring på 100 timmar.

- a) Vad är sannolikheten att en sådan säkring har en livslängd som överstiger 200 timmar?
- b) Anta att man kontrollerar 5 stycken sådana säkringar. Vad är sannolikheten att exakt 2 av dem har en livslängd som överstiger 200 timmar?

(6 poäng)

Uppgift 4: Man gjorde 5 mätningar på en lösnings fryspunkt och fick följande resultat:

1.7 0.5 2.1 1.9 0.3

Bestäm ett 90%-igt konfidensintervall för fryspunkten om mätningarna är normalfördelade och om

- a) $\sigma^2 = 0.7$ är känd i förväg.
- b) σ^2 är okänd och uppskattas med s^2 .

(6 poäng)

Uppgift 5: Temperatur, fuktighet och belysningens våglängd är faktorer som påverkar en viss livsmedelsprodukts hållbarhet. Vid ett tillfälle genomfördes ett 2^3 -faktor försök för att ta reda på hur påverkan såg ut. De faktorer respektive nivåer som användes var:

	-	+
T: temperatur	-5°C	60°C
F: fuktighet	40%	85%
V: belysningens våglängd	200nm	650nm

Resultatvariabeln, y, valdes som "antal veckor". Resultatet av försöken blev enligt följande:

T	F	V	Resultat, y
-	-	-	9
+	-	-	4
-	+	-	8
+	+	-	2
-	-	+	11
+	-	+	5
-	+	+	9
+	+	+	3+

Följande effekter beräknades:

$$\ell_T = -5.75 \quad \ell_F = -1.755 \quad \ell_V = 1.25 \quad \ell_{TF} = -0.25$$

- Den ansvarige personen för söken blev uppmanad att beskriva för en kund hur belysningens våglängd påverkade hållbarheten. Hur bör han förklara ℓ_V för en kund som inte kan någonting om försöksplanering? Observera att kunden är i stort behov av att förstå detta för att kunna lagra sina produkter på ett optimalt sätt.
- Beräkna de resterande huvud- och samspelseffekterna.
- Rita in ett av de största samspelen i en samspelsgraf.
- Rita in resultaten, y, i en kub.

(8 poäng)

Uppgift 6: Man planerar att göra ett 2^{6-3} reducerat faktorförsök. Föreslå vilka generatorer man bör använda.

- Ange definierande relationerna och upplösningen som du får när du använder de generatorer som du har föreslagit.
- Ange vilka alias som faktor B kommer att få.

(6 poäng)

Uppgift 7: Bearbetningen av ett visst mått studerades med hjälp av $\bar{x}$ -diagram och R-diagram. Resultatet av 20 provgrupper om vardera 5 enheter anges nedan i den ordning enheterna tillverkades:

Tillfälle	1	2	3	4	5	6	7
$\bar{x}$	99.912	99.902	99.958	99.932	99.920	99.872	99.859
R	0.10	0.12	0.08	0.20	0.15	0.11	0.17

Tillfälle	8	9	10	11	12	13
$\bar{x}$	99.950	99.875	99.877	99.870	99.912	99.841
R	0.09	0.07	0.12	0.12	0.10	0.20

Tillfälle	14	15	16	17	18	19	20
$\bar{x}$	99.864	99.815	99.868	99.888	99.855	99.878	99.886
R	0.11	0.10	0.08	0.05	0.18	0.19	0.16

Beräkna kontrollgränser i ett $\bar{x}$ -diagram och ett R-diagram och avgör om processen är under statistisk kontroll eller ej.

(6 poäng)

Uppgift 8: Vid studiet av antalet, N, belastningscykler före utmattningsbrott hos en maskindetalj fick man följande resultat för lg N vid given påkänning.

lg N	Frekvens
53.0 < x ≤ 53.5	1
53.5 < x ≤ 54.0	2
54.0 < x ≤ 54.5	4
54.5 < x ≤ 55.0	8
55.0 < x ≤ 55.5	11
55.5 < x ≤ 56.0	11
56.0 < x ≤ 56.5	7
56.5 < x ≤ 57.0	3
57.0 < x ≤ 57.5	2
57.5 < x ≤ 58.0	1

- Anta att toleransen är 55 ± 5 . Använd blanketten för duglighetstest som bifogas tentamenstesens för att beräkna duglighetsindex, C_p , och korregerat duglighetsindex, C_{pk} .
- Är detta en bra tillverkningsprocess? Använd värdena på C_p och C_{pk} för att motivera ditt svar.

(6 poäng)

Lösningar till Tillämpad matematisk statistik den 15 dec 2010

Uppgift 1: A = batteri är tillverkat i fabrik A A^C = batteri är tillverkat i fabrik B

C = ett batteri räcker längre än 10 driftstimmar.

$$P(A) = 0.70 \quad P(A^C) = 0.30 \quad P(C | A) = 0.95 \quad P(C | A^C) = 0.98$$

a) $P(A \cap C) = P(C | A) \cdot P(A) = 0.95 \cdot 0.7 = 0.665$

	A	A^C	
C	0.665	0.294	0.959
C^C	0.035	0.006	0.041
	0.70	0.30	1.00

$$P(A^C \cap C) = P(C | A^C) \cdot P(A^C) = 0.98 \cdot 0.3 = 0.294$$

b) $P(C) = 0.959$

c) $P(A | C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{0.665}{0.959} \approx 0.6934$

Uppgift 2: ξ = antal larm/ dygn $\xi = \text{Po}(\lambda = 0.52)$

a) $P(\xi > 2) = 1 - P(\xi \leq 21) = 1 - e^{-0.52} \cdot \left(\frac{0.52^0}{0!} + \frac{0.52^1}{1!} + \frac{0.52^2}{2!} \right) \approx$
 $\approx 1 - 0.9841 = 0.0159$

b) ξ = antal larm/ 30 dygn $\xi = \text{Po}(\lambda = 30 \cdot 0.52 = 15.6)$

Eftersom $\lambda = 15.6 > 15$ kan vi använda normalapproximation dvs

ξ är ungefär $N(\mu = \lambda, \sigma = \sqrt{\lambda}) = N(15.6, \sqrt{15.6})$

$$P(\xi > 25) = 1 - P(\xi < 25) = 1 - P\left(Z < \frac{25 - 15.6}{\sqrt{15.6}}\right) = 1 - P(Z < 2.38) \approx$$

 $\approx 1 - 0.9913 = 0.9987$

Uppgift 3: ξ = livslängden hos en viss typ av säkring

$$f(x) = \begin{cases} 0.01e^{-0.01x} & \text{för } x \geq 0 \\ 0 & \text{för } x < 0 \end{cases}$$

d.v.s. ξ är Exponentialfördelad med $\lambda = 0.01$

uppgift 3 fortsätter på nästa sida

Fortsättning uppgift 3:

a) $P(\xi > 200) = 1 - P(\xi < 200) = 1 - (1 - e^{-0.01 \cdot 200}) = e^{-2} \approx 0.135$

b) η = antal säkringar vars livslängd överstiger 200 timmar
 $\eta = \text{Bin}(n, p) = \text{Bin}(5, 0.135)$

$$P(\eta = 2) = \binom{5}{2} 0.135^2 \cdot (1 - 0.135)^3 \approx 0.118$$

Uppgift 4:

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 6.5 \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 11.25 \quad n = 5 \quad df = 4$$

$$\bar{x} = \frac{6.5}{5} = 1.3 \quad s = \sqrt{\frac{11.25 - \frac{6.5^2}{5}}{5-1}} = \sqrt{0.7}$$

a) $\bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow 1.3 \pm 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.7}{5}} \Leftrightarrow 1.3 \pm 0.62 \Leftrightarrow [0.68, 1.92]$

b) $\bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow 1.3 \pm 2.13 \cdot \sqrt{\frac{0.7}{5}} \Leftrightarrow 1.3 \pm 0.80 \Leftrightarrow [0.50, 2.10]$

Uppgift 5:

a) Om man lagrar livsmedlet i belysning med våglängden 650nm så ökar man livsmedlets hållbarhet med 1.25 veckor jämför med om man lagrar livsmedlet i belysning med våglängden 200nm.

b) $\ell_{TV} = \frac{9+8+5+3}{4} - \frac{4+2+11+9}{4} = -0.25$

$$\ell_{FV} = \frac{9+4+9+3}{4} - \frac{8+2+11+5}{4} = -0.25$$

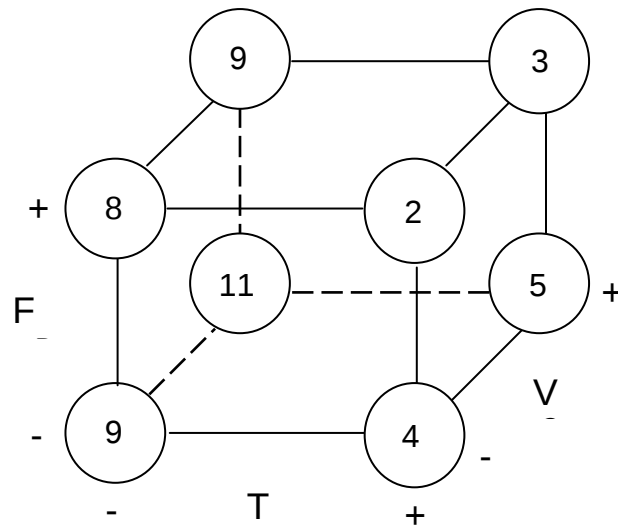
$$\ell_{TFV} = \frac{4+8+11+3}{4} - \frac{9+2+5+9}{4} = 0.25$$

c) Samspelsgrafen för samspelet TF ritas in i punkterna

$$T.F. = \frac{9+11}{2} = 10 \quad T.F_+ = \frac{8+9}{2} = 8.5$$

$$T_+F. = \frac{4+5}{2} = 4.5 \quad T_+F_+ = \frac{2+3}{2} = 10$$

d) Resultaten av försöken skrivs in i kubens hörncirklar.



Uppgift 6: Man skall alltså genomföra ett 2^{6-3} försök

generatorer: $D = AB$ $E = AC$ $F = BC$

a) definierande relationer:

$$I_1 = ABD$$

$$I_2 = ACE$$

$$I_3 = BCF$$

$$I_4 = I_1 \cdot I_2 = \cancel{A}BD \cdot \cancel{A}CE = BCDE$$

$$I_5 = I_1 \cdot I_3 = \cancel{A}BD \cdot \cancel{B}CF = ACDF$$

$$I_6 = I_2 \cdot I_3 = \cancel{A}CE \cdot \cancel{B}CF = ABEF$$

$$I_7 = I_1 \cdot I_2 \cdot I_3 = \cancel{A}BD \cdot \cancel{A}CE \cdot \cancel{B}CF = DEF$$

Upplösningen = III

b) faktorn B får följande alias:

$$B I_1 = \cancel{B} \cdot \cancel{A}BD = AD$$

$$B I_2 = B \cdot ACE = ABCE$$

$$B I_3 = \cancel{B} \cdot \cancel{B}CF = CF$$

$$B I_4 = \cancel{B} \cdot \cancel{B}CDE = CDE$$

$$B I_5 = B \cdot ACDF = ABCDF$$

$$B I_6 = \cancel{B} \cdot \cancel{A}BEF = AEF$$

$$B I_7 = B \cdot DEF = BDEF$$

$$\ell_B \rightarrow B + AD + CF + CDE + AEF + ABCD + BDEF + ABCDF$$

Uppgift 7: $\bar{\bar{x}} = \frac{1}{20} (99.912 + 99.902 + \dots + 99.886) = 99.8867$

$$\bar{R} = \frac{1}{20} (0.10 + 0.12 + \dots + 0.16) = 0.125$$

$$n = 5 \Rightarrow A_2 = 0.577, D_3 = 0 \text{ och } D_4 = 2.115$$

Kontrollgränser för $\bar{x}$ -diagrammet:

$$K_{\bar{o}} = \bar{\bar{x}} + A_2 \cdot \bar{R} = 99.8867 + 0.577 \cdot 0.125 = 99.9588$$

$$CL = \bar{\bar{x}}$$

$$K_u = \bar{\bar{x}} - A_2 \cdot \bar{R} = 99.8867 - 0.577 \cdot 0.125 = 99.8146$$

Kontrollgränser för R-diagrammet:

$$K_{\bar{o}} = D_4 \cdot \bar{R} = 2.115 \cdot 0.125 = 0.2643$$

$$CL = \bar{R} = 0.125$$

$$K_u = D_3 \cdot \bar{R} = 0$$

Processen är under statistisk kontroll eftersom alla punkter ligger mellan kontrollgränserna i båda diagrammen

Uppgift 8: blanketten får man att $\mu \approx 55.5$ och $\sigma \approx 6$

Detta ger värdena $C_p = 1.67$ och $C_{pk} = 1.50$.

Processen är mycket bra.

$C_p = 1.67$ visar att måttet på de enheter som tillverkas har liten spridning.

$C_{pk} = 1.50$ ligger ganska nära värdet på C_p vilket betyder att processen är ganska bra centrerad.