LMA521 &

Lösningar LKT325 2013-12-18

1. a) Låt ξ = antalet hjortar under ett dygn.

ξ är $P_o(2)$. Dvs $P(\xi = x) = \dfrac{e^{-2}2^x}{x!}$

$$P(\xi=1) = \frac{e^{-2}2^1}{1!} = 2e^{-2} \approx \boxed{0{,}271.}$$

b) $P(\xi \geq 3) = 1 - P(\xi < 3) = 1 - P(\xi \leq 2) =$

$= 1 - (P(\xi=0) + P(\xi=1) + P(\xi=2))$

$= 1 - \left(\dfrac{e^{-2}\cdot 2^0}{0!} + \dfrac{e^{-2}2^1}{1!} + \dfrac{e^{-2}\cdot 2^2}{2!} \right) =$

$= 1 - (e^{-2} + 2e^{-2} + 2e^{-2}) \approx \boxed{0{,}323}$

c) ξ_1 = antalet hjortar under måndag

ξ_2 = —— " —— torsdag

$\eta = \xi_1 + \xi_2$ = totala antalet hjortar under måndag och torsdag

$\eta \leq 1$ om $\xi_1 = 0$ och $\xi_2 = 0$ eller

$\xi_1 = 1$ och $\xi_2 = 0$ eller

$\xi_1 = 0$ och $\xi_2 = 1$

$\Longrightarrow P(\eta \leq 1) = P(\xi_1 = 0 \cap \xi_2 = 0) + P(\xi_1 = 1 \cap \xi_2 = 0) + P(\xi_1 = 0 \cap \xi_2 = 1)$

$= P(\xi_1=0)P(\xi_2=0) + P(\xi_1=1)P(\xi_2=0) + P(\xi_1=0)P(\xi_2=1)$

oberoende

$= \dfrac{e^{-2}\cdot 2^0}{0!}\cdot\dfrac{e^{-2}2^0}{0!} + \dfrac{e^{-2}2^1}{1!}\dfrac{e^{-2}2^0}{0!} + \dfrac{e^{-2}2^0}{0!}\dfrac{e^{-2}2^1}{1!}$

$= e^{-4}(1 + 2 + 2) = 5e^{-4} \approx \boxed{0{,}092}$

2) ξ = livstiden för batteri.

ξ är Exp(1.5), dvs $f(x) = \begin{cases} 1{,}5\, e^{-1.5x} & \text{då } x \geq 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

a) $P(\xi \leq 1) = \int_0^1 1{,}5\, e^{-1{,}5x}\, dx = \left[-e^{-1{,}5x}\right]_0^1 = 1 - e^{-1{,}5} \approx 0{,}778$

b) ξ_i = livslängden för batteri nr. i.

$\eta = \sum_{i=1}^{100} \xi_i$ totala livstiden. Vet att eftersom ξ_i är Exp(1,5)

så $E(\xi_i) = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$. $Var(\xi_i) = \left(\frac{1}{1{,}5}\right)^2 \Rightarrow S(\xi_i) = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3}$

Centrala gränsvärdessatsen $\Rightarrow$ η är approx $N(100 \cdot \frac{2}{3}, \sqrt{100} \cdot \frac{2}{3})$

$= N(200/3, 20/3)$.

$P(\eta \geq 80) = 1 - P(\eta < 80) = 1 - P\Big(\underbrace{\frac{\eta - \frac{200}{3}}{20/3}}_{= Z} < \underbrace{\frac{80 - 200/3}{20/3}}_{= 2}\Big) =$

$= 1 - P(Z < 2) \underset{\substack{\uparrow \\ Z \text{ är approx } N(0,1)}}{\approx} 1 - \Phi(2) \underset{\text{tabell}}{=} 1 - 0{,}9772 = \boxed{0{,}0228}$

c) Låt d = antalet batterier av de 6 med livstid på mindre än 1 år. Då är d Bin(6, 0.223).

$P(d < 3) = P(d \leq 2) = P(d=0) + P(d=1) + P(d=2)$

$= \binom{6}{0} 0{,}778^0 \cdot (1 - 0{,}778)^6 + \binom{6}{1} 0{,}778\, (1 - 0{,}778)^5 + \binom{6}{2} \cdot 0{,}778^2 \cdot (1 - 0{,}778)^4$

$\approx \boxed{0{,}0251}$

3.

a) $E(\xi) = \int_0^2 x \cdot \frac{3}{14}(x+x^2)dx = \frac{3}{14}\int_0^2 x^2+x^3 dx = \frac{3}{14}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^2 =$

$= \frac{3}{14}\left(\frac{8}{3} + \frac{16}{4} \right) = \frac{8}{14} + \frac{12}{14} = \frac{20}{14} = \boxed{\frac{10}{7}}$

$E(\xi^2) = \int_0^2 x^2 \frac{3}{14}(x+x^2)dx = \frac{3}{14}\int_0^2 x^3+x^4 dx = \frac{3}{14}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_0^2 =$

$= \frac{3}{14}\left(\frac{16}{4} + \frac{32}{5} \right) = \ldots = \frac{78}{35}$

$\Rightarrow Var(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2 = \frac{78}{35} - \left(\frac{10}{7}\right)^2 = \ldots = \boxed{\frac{46}{245} \approx 0{,}188}$

$\Longrightarrow S(\xi) = \sqrt{Var(\xi)} = \sqrt{\frac{46}{245}} \approx \boxed{0{,}433}$

b) $P(\xi \leq 1{,}5) = \int_0^{1,5} \frac{3}{14}(x + x^2)dx = \ldots \approx \boxed{0{,}482}$

c) $P(\xi \geq 0{,}5 \mid \xi \leq 0{,}75) = \frac{P(\xi \geq 0{,}5 \cap \xi \leq 0{,}75)}{P(\xi \leq 0{,}75)}$

$= \frac{P(0{,}5 \leq \xi \leq 0{,}75)}{P(\xi \leq 0{,}75)} = \frac{\int_{0,5}^{0,75} \frac{3}{14}(x+x^2)dx}{\int_0^{0,75} \frac{3}{14}(x+x^2)dx} = \ldots \approx \boxed{0{,}605}$

---

4. $\bar{x} = \frac{1269+1271+1263+1265}{4} = 1267$

a) Om $\sigma = 3{,}65$ så blir intervallet

$\bar{x} \pm z_{0{,}975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1267 \pm 1{,}96 \cdot \frac{3{,}65}{\sqrt{4}} = \boxed{1267 \pm 3{,}577}$

b) σ skattas med s:

$s^2 = \frac{1}{4-1}\left((1269-1267)^2 + (1271-1267)^2 + (1263-1267)^2 + (1265-1267)^2\right)$

$= \ldots \approx 13{,}333 \Rightarrow s \approx 3{,}6515$

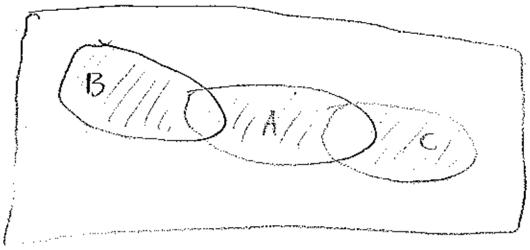
forts. →

$\alpha = 0{,}02$. Ett 98% konf. int. blir (4-1=3 frihetsgrader)

$$\bar{x} \pm t(3) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 1267 \pm 4{,}54 \cdot \frac{3{,}6515}{\sqrt{4}} = \boxed{1267 \pm 8{,}29}$$

5.

a) $\{1 \text{ fel}\} = \{\text{endast } A\} \cup \{\text{endast } B\} \cup \{\text{endast } C\}$



/// = 1 fel

$$P(\text{endast } A) = P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C)$$
$$\underset{\text{ober.}}{=} P(A) - P(A)P(B) - P(A)P(C)$$
$$= 0{,}02 - 0{,}02 \cdot 0{,}03 - 0{,}02 \cdot 0{,}01$$
$$= \boxed{0{,}0192}$$

$$P(\text{endast } B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B)$$
$$= 0{,}03 - 0{,}02 \cdot 0{,}03 = 0{,}0294$$

$$P(\text{endast } C) = P(C) - P(A \cap C) = P(C) - P(A)P(C)$$
$$= 0{,}01 - 0{,}02 \cdot 0{,}01 = 0{,}0098$$

$$\Longrightarrow P(1 \text{ fel}) = 0{,}0192 + 0{,}0294 + 0{,}0098 = \boxed{0{,}0584}$$

b) $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) = \boxed{0{,}03}$$

c) $$\{2 \text{ fel}\} = (A \cap B) \cup (A \cap C) \Longrightarrow$$

$$P(2 \text{ fel}) = P(A \cap B) + P(A \cap C) =$$
$$= P(A)P(B) + P(A)P(C) = 0{,}02 \cdot 0{,}03 + 0{,}02 \cdot 0{,}01$$
$$= \boxed{0{,}0008}$$

6. a) $l_A = \frac{(59+74+60+72)}{4} - \frac{(56+75+55+70)}{4}$

$= \boxed{2.25}$

$l_B = \frac{(75+74+70+72)}{4} - \frac{(56+59+55+60)}{4}$

$= \boxed{15.25}$

$l_C = \frac{(55+60+70+72)}{4} - \frac{(56+59+75+74)}{4}$

$= \boxed{-1.75}$

b) Välj tex $D = AC$ $E = BC$

$I_1 = DAC$ $I_2 = EBC$

$I_3 = I_1 \cdot I_2 = DA\cancel{C}EB\cancel{C} = DAEB$. Så upplösningen blir III.
Gör ej att få högre upplösning.

$A \cdot I_1 = ADAC = DC$

$AI_2 = AEBC$

$AI_3 = ADAEB = DEB$

$\Longrightarrow$ Sammanblandningsmönstret för A blir

$\boxed{l_A \rightarrow A + DC + DEB + AEBC}$

7.

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{20}(11{,}4 + 10{,}9 + \ldots + 11{,}2) = 10{,}465$$

$$\bar{R} = \frac{1}{20}(2{,}1 + 1{,}3 + \ldots + 2{,}3) = 2{,}715$$

$\bar{x}$-diagrammet: $\bar{\bar{x}} \pm A_2 \bar{R} \overset{\text{tabell}}{\underset{n=5}{=}} 10{,}465 \pm 0{,}577 \cdot 2{,}715 =$

$= 10{,}465 \pm 1{,}567 = [8{,}898,\ 12{,}032]$.

Alla $\bar{x}$-värden ligger inom gränserna.

R-diagrammet: undre gräns $= D_3 \bar{R} \overset{\text{tabell}}{\underset{n=5}{=}} 0 \cdot \bar{R} = 0$

övre gräns $= D_4 \bar{R} = 2{,}115 \cdot 2{,}715 = 5{,}74$

Alla R-värden ligger inom gränserna.

<u>Slutsats:</u> $\boxed{\text{Processen är i statistisk kontroll.}}$

---

8 a) Se binomialnomogrammet. Där fås att urvalsstorleken ≈ 140 (n) och acceptanstalet $c \approx 7$.

Låt d_1 = antalet defekta i urval 1. d_2 = defekta i urval 2

b) Partiet accepteras om i

$d_1 = 0$ <u>eller</u> $d_1 = 1$ <u>eller</u> $d_1 = 2$ och $d_2 = 0$

Så $L(0{,}04) = P(d_1 = 0) + P(d_1 = 1) + P(d_1 = 2 \cap d_2 = 0) =$

$= P(d_1 = 0) + P(d_1 = 1) + P(d_1 = 2)P(d_2 = 0)$

$= \binom{20}{0} 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0{,}04^1 \cdot 0{,}96^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0{,}04^2 \cdot 0{,}96^{18} \cdot \binom{40}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^{40}$

d_1 är $Bin(20,\ 0{,}04)$

d_2 är $Bin(40,\ 0{,}04)$

$= \ldots \approx \boxed{0{,}839}$