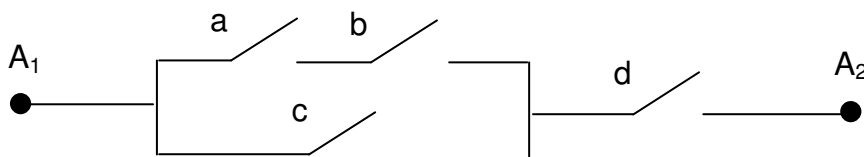


Övningstentamen 1

Uppgift 1: På en arbetsplats skadades 1% av personalen under ett år. 60% av alla skadade var män. 30% av alla anställda var kvinnor. Är det manliga eller kvinnliga anställda som löper störst risk att råka ut för en skada enligt denna undersökning. (Motivering, som grundas på beräkningar, krävs för att få poäng.) (6 poäng)

Uppgift 2: Vad är sannolikheten att det blir kontakt mellan punkterna A_1 och A_2 i nedanstående schema om reläkontakterna a, b, c och d slutes med sannolikheterna 0.2, 0.6, 0.3 och 0.9. Händelserna att kontakterna slutes kan antas vara oberoende.



(6 poäng)

Uppgift 3: I en tvättinrättning betalas dels en fast avgift om 30 kronor och dels en rörlig avgift om 20 kronor per kilo tvätt. Vikten av en kunds tvätt, ξ , kan antas vara en stokastisk variabel med frekvensfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} C(3-x) & \text{för } 1 < x < 3 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

- Bestäm konstanten C.
- Bestäm fördelningsfunktionen för ξ .
- Låt η vara den avgift en kund betalar för sin tvätt. Beräkna väntevärde och varians för η .

(8 poäng)

Uppgift 4: Livslängden, ξ , (i timmar) hos en viss typ av elektronrör har frekvensfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0.001e^{-0.001x} & \text{för } x \geq 0 \\ 0 & \text{för } x < 0 \end{cases}$$

- Beräkna sannolikheten att ett sådant rör fungerar efter 2000 timmar.
- Anta att man väljer ut 6 sådana rör. Vad är sannolikheten att fler än 3 av dem fungerar efter 2000 timmar?

(6 poäng)

Uppgift 5: En fabrikant masstillverkar en vara där varje enhet med sannolikheten 0.1 blir defekt. En felfri enhet ger honom vinsten 60 kronor medan en defekt ger honom en förlust på 40 kronor. Hur stor är sannolikheten att han för ett parti på 2000 enheter får en vinst på minst 97 000 kronor? (6 poäng)

Uppgift 6: En amatörodlare av tomater ville maximera sin skörd. Hon beslöt sig för att använda ett 2^2 -faktor försök. De faktorer respektive nivåer som användes var:

	–	+
A: växtförhållanden	i växthuset	utanför växthuset
B: vattning	en gång/dag	två gånger/dag

Resultatvariabeln, y , valdes som antal kilo skörades tomater under sommaren. Av en tillfällighet fick odlaren tag på 8 likvärdiga tomatplantor. Hon valde då att använda 2 plantor i varje försökssituation. Resultatet av försöken blev enligt följande:

A	B	Skörd		Skörd	
		y_1	försöksordning	y_2	försöksordning
–	–	4.5	6	3.5	3
+	–	3.8	4	3.6	8
–	+	5.1	5	5.6	7
+	+	4.5	1	4.4	2

Följande effekter beräknades: $\ell_A = -0.575$

- Vår amatörodlare vill beskriva ovanstående resultat för en annan person på en trädgårdsmässa. Hur bör han förklara ℓ_A i ord utan att använda beteckningen A.
 - Beräkna de resterande huvud- och samspelseffekterna.
 - Bilda ett 95%-igt referensintervall och avgör vilka effekter som är signifikanta.
 - Använd referensintervallet för att skriva upp en lämplig matematisk formel som beskriver hur skörden påverkas av växtförhållandena och vattningen.
 - Vilka antaganden måste man göra för att den analys som har gjorts i deluppgifterna c-d skall gälla?
 - Genomför en residualanalys för att upptäcka om dessa antaganden gäller.
- (12 poäng)

Uppgift 7: Antag att man har en tillverkningsprocess med $T_\delta=4$ och $T_u=0$. Från denna process erhöll man följande värden

3.0 3.5 0.2 2.1 1.0 1.6 2.6 1.5 0.2 1.0

- Använd de erhållna data till att skatta kapabilitetsindex.
 - Anta att de värden man erhållit är normalfördelade med $\sigma \approx 0.6$ och att processen är riktigt centrerad. Beräkna med hjälp av dessa antaganden andelen kasserade enheter som processen genererar
 - Finns det något högsta/minsta värde som rekommenderas för kapabilitetsindex för en process?
- (6 poäng)

Lösningar till övningstentamen 1

Uppgift 1: S = skadade M = män K = Kvinnor

$$P(S) = 0.01 \quad P(M | S) = 0.60 \quad P(K) = 0.30$$

$$P(M \cap S) = P(M | S) \cdot P(S) = 0.6 \cdot 0.01 = 0.006$$

	S	S ^c	
M	0.006	0.694	0.70
K	0.004	0.296	0.30
	0.01	0.99	1.00

$$\text{Beräkna : } P(S | M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)} = \frac{0.006}{0.70} \approx 0.0086$$

$$P(S | K) = \frac{P(S \cap K)}{P(K)} = \frac{0.004}{0.30} \approx 0.0133$$

Risken för skador bland kvinnor är 0.0133 mot 0.0086 för män. Kvinnor har alltså större risk än män att råka ut för skador på denna arbetsplats.

Uppgift 2: Kalla händelserna att reläerna i övre slingan i parallellkopplingen sluts för S_1 och att reläerna i minst en av slingorna i hela parallellkopplingen sluts för S_3 .

$$P(S_1) = P(a) \cdot P(b) = 0.2 \cdot 0.6 = 0.12$$

$$P(A_1 \rightarrow A_2) = P(S_3 \cap d) = P([S_1 \cup c] \cap d) = (\text{oberoende}) = P(S_1 \cup c) \cdot P(d) =$$

$$= (\text{additionssatsen}) = [P(S_1) + P(c) - P(S_1 \cap c)] \cdot P(d) =$$

$$= [0.12 + 0.3 - 0.12 \cdot 0.3] \cdot 0.9 = 0.3456$$

Uppgift 3:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow C \int_1^3 (3-x) dx = C \left[3x - \frac{x^2}{2} \right]_1^3 = C \left[\left(3 \cdot 3 - \frac{3^2}{2} \right) - \left(3 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} \right) \right]$$

=

$$= C [4.5 - 2.5] = 2C = 1 \Rightarrow C = 1/2$$

$$\text{b) } \underline{x \leq 1} \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

$$\begin{aligned} \underline{1 < x < 3} \quad F(x) &= \int_{-\infty}^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt = 0 + \frac{1}{2} \int_1^x (3-t) dt = \frac{1}{2} \left[3t - \frac{t^2}{2} \right]_1^x = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(3 \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) - \left(3 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} \right) \right] = -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 3x + \frac{5}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\underline{x \geq 3} \quad F(x) = \int_{-\infty}^1 f(t) dt + \int_1^3 f(t) dt + \int_3^x f(t) dt = 0 + 1 + 0 = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 3x + \frac{5}{2} \right) & \text{för } 1 < x < 3 \\ 1 & \text{för } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \eta = 30 + 20 \cdot \xi$$

$$\begin{aligned} E(\eta) &= 30 + 20 \cdot E(\xi) = 30 + 20 \cdot \int_1^3 x f(x) dx = 30 + 20 \cdot \frac{1}{2} \int_1^3 x(3-x) dx = \\ &= 30 + 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{3 \cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \right]_1^3 = \\ &= 30 + 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{3 \cdot 3^2}{2} - \frac{3^3}{3} \right) - \left(\frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) \right] = 63 \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Var}(\eta) = 20^2 \cdot \text{Var}(\xi) =$$

$$\begin{aligned} &= 20^2 \cdot \left[\int_1^3 x^2 f(x) dx - [E(\xi)]^2 \right] = 20^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \int_1^3 x^2(3-x) dx - \left(\frac{5}{3} \right)^2 \right] = \\ &= 20^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{3 \cdot x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \right]_1^3 - \frac{25}{9} \right] = \\ &= 20^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{3 \cdot 3^3}{3} - \frac{3^4}{4} \right) - \left(\frac{3 \cdot 1^3}{3} - \frac{1^4}{4} \right) \right] - \frac{25}{9} \right] = 20^2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{800}{9} = 88 \frac{8}{9} \end{aligned}$$

Uppgift 4 ξ = livslängden (räknat i timmar) hos ett elektronrör

$$f(x) = \begin{cases} 0.001 e^{-0.001x} & \text{för } x \geq 0 \\ 0 & \text{för } x < 0 \end{cases}$$

d.v.s. ξ är Exponentialfördelad med $\lambda = 0.001$

$$\text{a) } P(\xi > 2000) = 1 - P(\xi < 2000) = 1 - (1 - e^{-0.001 \cdot 2000}) \approx 0.135$$

fortsättning uppgift 4 på nästa sida

fortsättning uppgift 4

b) η = antal rör som fungerar efter 2000 timmar η är $\text{Bin}(n, p) = \text{Bin}(6, 0.135)$

$$P(\eta > 3) = \binom{6}{4} 0.135^4 \cdot (1-0.135)^2 + \binom{6}{5} 0.135^5 \cdot (1-0.135)^1 + \\ + \binom{6}{6} 0.135^6 \cdot (1-0.135)^0 \approx 0.00397$$

Uppgift 5: ξ = vinsten på en enhet

$\xi = x$	$P(\xi = x)$
-40	0.1
60	0.9

$$E(\xi) = -40 \cdot 0.1 + 60 \cdot 0.9 = 50$$

$$\text{Var}(\xi) = (-40)^2 \cdot 0.1 + 60^2 \cdot 0.9 - 50^2 = 900$$

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{2000}$$

$$E(\eta) = 2000 \cdot 50 = 100\,000$$

$$\text{Var}(\eta) = 2000 \cdot 900 = 180\,000$$

Eftersom $n = 2000$ kan vi använda resultatet i centrala gränsvärdessatsen som säger att när n är tillräckligt stor är en normalapproximation bra

$$P(\eta > 97000) = 1 - P(\eta < 97000) = 1 - P\left(Z < \frac{97000 - 100000}{\sqrt{180000}}\right) = \\ = 1 - P(Z < -7.07) = P(Z < 7.07) \approx 1.000$$

Uppgift 6:

A	B	AB	y_1	y_2	$\bar{y}$	s^2
-	-	+	4.5	3.5	4.00	0.500
+	-	-	3.8	3.6	3.70	0.020
-	+	-	5.1	5.6	5.35	0.105
+	+	+	4.5	4.4	4.45	0.005

a) $A = -0.575$ betyder att när man odlar tomater i växthus så kan man förvänta sig att skörden per planta blir 0.575 kilo större jämfört med att man odlar samma tomatsort utanför växthuset.

$$b) \quad \ell_B = \frac{5.35 + 4.45}{2} - \frac{4.00 + 3.70}{2} = 1.05$$

$$\ell_{AB} = \frac{4.00 + 4.45}{2} - \frac{3.70 + 5.35}{2} = -0.03$$

$$c) \quad s_p = \sqrt{\frac{0.500 + 0.020 + 0.105 + 0.005}{8 - 4}} \approx 0.397$$

Ett 95%-igt referensintervall bildat av en t-fördelning med 4 df:

$$0 \pm 2.78 \cdot \frac{2 \cdot 0.397}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow 0 \pm 780$$

d) Enbart effekten B är signifikant.

$$y = \ell_M + \frac{\ell_B}{2} x_B = 4.375 + \frac{1.05}{2} x_B = 4.375 + 0.525 x_B$$

e) observationerna skall vara oberoende och normalfördelade med samma varians.

f)	y	$\hat{y}$	$\varepsilon = y - \hat{y}$	försöksordning
	4.5	$4.375 - 0.525 = 3.85$	0.65	6
	3.5	$4.375 - 0.525 = 3.85$	-0.35	3
	3.8	$4.375 - 0.525 = 3.85$	-0.05	4
	3.6	$4.375 - 0.525 = 3.85$	-0.25	8
	5.1	$4.375 + 0.525 = 4.90$	0.20	5
	5.6	$4.375 + 0.525 = 4.90$	0.70	7
	4.5	$4.375 + 0.525 = 4.90$	-0.40	1
	4.4	$4.375 + 0.525 = 4.90$	-0.50	2

Om man ritar upp observationerna i en residualplot så ser man inga mönster som motsäger de antaganden man har gjort.

Uppgift 7:

$$a) \quad \sum_{i=1}^{10} x_i = 16.7 \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 39.31 \quad n = 10$$

$$s = \sqrt{\frac{39.31 - \frac{16.7^2}{10}}{10 - 1}} \approx 1.126$$

$$C_p \approx \frac{T_{\bar{o}} - T_u}{6s} = \frac{4 - 0}{6 \cdot 1.126} = 0.592$$

b) Processen riktigt centrerad betyder att ξ är ungefär $N(2, 0.6)$

$$\begin{aligned} P(\xi > 4) + P(\xi < 0) &= 1 - P(\xi < 4) + P(\xi < 0) = 1 - P\left(Z < \frac{4-2}{0.6}\right) + P\left(Z < \frac{0-2}{0.6}\right) = \\ &= 1 - P(Z < 3.33) + P(Z < -3.33) = 1 - P(Z < 3.33) + 1 - P(Z < 3.33) = \\ &= 2(1 - P(Z < 3.33)) \approx 2(1 - 0.9996) = 0.0008 \end{aligned}$$

c) Kapabilitetsindex bör vara större än 1.5 för en nystartad process och större än 1.33 om processen varit igång en tid.