1 Föreläsning I, Vecka I: 5/11-11/11 MatStat: Kap 1, avsnitt 2.1-2.2, 2.5

Introduktion till kursen. Grundläggande sannolikhetslära. Mängdlära, händelser, sannolikhetsmått

Händelse följer samma räkneregler som (del-)mängder, såsom snitt $\cap$, union $\cup$, komplement A^c etc. Sannolikhet och händelse är fundamentala begrepp i Sannolikhetslära och Matematisk statistik.

1.1 Sannolikhet

Ex 1.1 Givet 1(ett) tärningskast med 1 (en) tärning. Vi betraktar *händelsen* att kastet ger poäng ≤ 4. Vad är sannolikheten att det inträffar?
Antal *gynnsamma* utfall är $4 =: g$ och antal möjliga är $6 =: m$. Sannolikheten är

$$P = \frac{g}{m}\,. \tag{1}$$

I detta fall $P = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Kommentarer

- (1) är den elementära definitionen av sannolikhet.
- Händelsen ovan skriver vi som A.

Ex 1.2 Givet 2 (två)tärningskast med 1 (en) tärning.
Vi definierar nu ett antal händelser och beräknar deras sannolikheter.

1. Händelsen A är att 1:a kasts poäng ≤ 3.
2. Händelsen B är att summan av 1:a kasts och 2:a kasts poäng ≤ 5.
3. Händelsen C är att 1:a kast poäng ≥ 5.
4. Händelsen D är att 2:a kast poäng ≥ 5.
5. Händelsen E är att 2:a kast poäng ≥ 4.

Beräkna sannolikheterna för händelserna nedan.

$$\begin{array}{llll} 1.\quad A, & 2.\quad B, & 3.\quad C & 4.\quad D, \\ 5.\quad A^c, & 6.\quad A\cup B, & 7.\quad A\cap C, & 8.\quad A\cap D \end{array}$$

Lösning

Två tärningskast ger 36 utfall. Första koordinat avser utfall på 1:a tärningskastet. Vi betraktar *utfallsrummet*

$$\Omega := \left\{ \begin{array}{cccccc} \{1,1\} & \{1,2\} & \{1,3\} & \{1,4\} & \{1,5\} & \{1,6\} \\ \{2,1\} & \{2,2\} & \{2,3\} & \{2,4\} & \{2,5\} & \{2,6\} \\ \{3,1\} & \{3,2\} & \{3,3\} & \{3,4\} & \{3,5\} & \{3,6\} \\ \{4,1\} & \{4,2\} & \{4,3\} & \{4,4\} & \{4,5\} & \{4,6\} \\ \{5,1\} & \{5,2\} & \{5,3\} & \{5,4\} & \{5,5\} & \{5,6\} \\ \{6,1\} & \{6,2\} & \{6,3\} & \{6,4\} & \{6,5\} & \{6,6\} \end{array} \right\} \tag{2}$$

där *utfallet* $\{x, y\}$ står för 1:a kasts poäng (x) respektive 2:a kasts poäng (y). Ω kallas alltså utfallsrum.

1. $P(A) = \frac{g}{m} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
2. $P(B) = \frac{g}{m} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.
3. $P(C) = \frac{g}{m} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
4. $P(D) = P(C) = \frac{g}{m} = \frac{1}{3}$.
5. $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
6. M.h.a.
$$P(A \cup B) = \{\text{Rita!}\} = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \tag{3}$$
kan vi beräkna $P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ så att
$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{5}{18} - \frac{9}{36} = \frac{19}{36} \approx 0.53.$$
7. Vi ser att $A \cap C = \emptyset$ (tomma händelsen). Dessutom är
$$P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A \cup C) = 0.$$
8. Vi ser att $P(A \cap D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$.
9. $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Kommentarer

- $P(A) + P(A^c) = 1$ gäller allmänt. P.s.s. är
$$P(B^c) = \frac{13}{18}, \text{ d.v.s. } P(B) + P(B^c) = 1.$$
- Sambandet (3) är ett allmänt samband.

- Allmänt gäller också att $P(\emptyset) = 0$.
- Vi har att $D \subseteq E$ och att $P(D) \leq P(E)$.
- Vi sätter $\Omega = \{(j,k) : k,j = 1,2,3,4,5,6\}$, utfallsrummet för två tärningskast poäng: j är poäng vid kast 1 och k vid kast 2.
- Det är klart att $P(\Omega) = 1$ och att

  $$P(\emptyset) = 0 \leq P(D) \leq P(E) \leq P(\Omega) = 1,$$

  Där $D \subseteq E$ för vilka händelser som helst i Ω.

1.2 Betingad sannolikhet

Ex 1.3 Med händelser som i föregående exempel, skall vi beräkna Sannolikheten för B *givet* A, alltså sannolikheten för B, *om* A inträffar. Detta kallas den *betingade* sannolikheten för B, givet A och skrivs $P(B|A)$. Hur beräknas denna sannolikhet?

Vi*förutsätter* alltså A inträffar. Detta är nu ett nytt utfallsrum, d.v.s. att 1:a kast ger poäng ≤ 3. Ufallsrummet är alltså

$$A = \begin{pmatrix} \{1,1\} & \{1,2\} & \{1,3\} & \{1,4\} & \{1,5\} & \{1,6\} \\ \{2,1\} & \{2,2\} & \{2,3\} & \{2,4\} & \{2,5\} & \{2,6\} \\ \{3,1\} & \{3,2\} & \{3,3\} & \{3,4\} & \{3,5\} & \{3,6\} \end{pmatrix}$$

Eftersom A är det nya utfallsrummet, behöver vi veta den del av B som är gemensam med A, d.v.s. helt enkelt $A \cap B$ markerat blått. Alltså 8 utfall: Detta skall jämföras med det nya utfallsrummets sannolikhet d.v.s. med $P(A) = \frac{1}{2}$:

$$P(B|A) = \frac{9/36}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Kommentarer

- Sannolikheten $P(B) = \dfrac{8}{15}$. Vi ser att $P(B|A) \neq P(B)$, d.v.s. $P(B|A)$ är påverkad av att A inträffar.
- Utifrån exemplet ovan, definierar vi

Definition 1 Den betingade sannolikheten för B, givet A definieras som

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \tag{4}$$

Ex 1.4 Vi fick att $P(A \cap D) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$ och att $P(A) = \dfrac{1}{2}$, samt $P(D) = \dfrac{1}{3}$. Händelserna A och$D$ kan knappast påverka varandra, utan är *oberoende*. Detta leder till följande definition.

Definition 2 Två händelser A och B är oberoende, om

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{5}$$

Kommentarer

- Vi ser att om vi sammanför oberoende med betingad sannolikhet ger (5) att
$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \{(4)\} = P(B|A).$$
Oberoende ger alltså $P(B) = P(B|A)$, vilket säger att sannolikheten för B inte påverkas av händelsen A också ett sätt allt tolka oberoende händelse.
- Vi iakttar följande likheter för händelser:
A och B oberoende $\Longleftrightarrow$ A^c och B oberoende.
- För betingning m.a.p. en händelse A gäller
$$P(B|A) + P(B^c|A) = 1.$$

Ex 1.5 Ibland betraktar man relativa frekvenser som sannolikheter. Man har följande sannolikheter att ta hänsyn till inom en stads population:

$$\begin{array}{lcl} P(\text{tung missbrukare}) & = & 0.1\% \\ P(\text{haschanvändare}|\text{tung missbrukare}) & = & 95\% \\ P(\text{haschanvändare}) & = & 10.0\% \end{array}$$

Ex 1.6 En läkare argumenterade för att förbjuda användning av hasch p.g.a. den höga sannolikheten 95%. En statistiker påpekade dock att sannolikheten $P(H|T)$ inte var så intressant utan viktigare var $P(T|H)$.
Beräkna sannolikheten $P(T|H)$.

Lösning

$$P(T|H) = \frac{P(T \cap H)}{P(H)} = \{\text{Bayes' sats}\} = \frac{P(H|T) \cdot P(T)}{P(H)} = \frac{0.95 \cdot 0.1\%}{10\%} = 0.0095 \approx 1\%.$$

Kommentarer

- Exemplet ovan illustrerar problem att tolka sannolikheter rätt. I detta och många fall ser man på fel sannolikhet vid bedömningar, om vad som är bra eller dåligt, utifrån observationer.

Ex 1.7 Givet händelsen (mängden) $A \cup B \cup C$. Dela upp unionen i sju parvis disjunkta (parvis icke samtidiga) händelser. För disjunkt union kan man använda "$\sqcup$".

Lösning

$$A \cup B \cup C = (A \setminus (B \cup C)) \sqcup (B \setminus (C \cup A)) \sqcup (C \setminus (A \cup B)) \sqcup (A \cap B \setminus C) \sqcup (B \cap C \setminus A) \sqcup (C \cap A \setminus B) \sqcup (A \cap B \cap C).$$

Ex 1.8 Givet en fotbollsmatch mellan Gais och Öis och en ishockeymatch mellan Frölunda och Örebro, en given kväll vid samma klockslag. Är resultaten i matcherna oberoende eller disjunkta? Försök att ge ett rimligt svar.

Lösning

Frågan om (o-)beroende handlar om det ena resultatet påverkar det andra. Förmodligen är de oberoende.
Frågan om disjunkta skulle ex.vis kunna vara att Gais vinner utesluter att Frölunda vinner. Det skulle innebära ett *beroende* mellan de två matchernas resultat. P.g.a. oberoende är machernas resultat inte disjunkta.