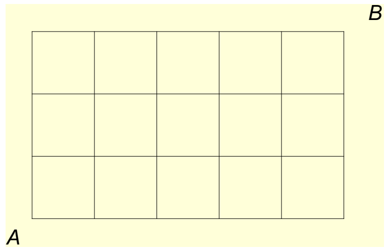
1 Föreläsning II, Vecka I, 5/11-11/11, avsnitt 2.3

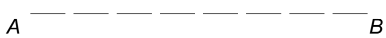
1.1 Kombinatorik

Ex 2.1 I ett rutnät går man åt höger eller uppåt. Hur många vägar finns det mellan A och B?



Lösning

Vi har 8 (del-)sträckor att välja uppåt och till höger på.



Man går $5 + 3 = 8$ delsträckor.

Vi utvecklar nedan en metod för att beräkna detta.

Ex 2.2 I allsvenskan (Fotboll) spelar alla 16 lag mot alla andra lag två och två. Varje par av lag möts två gånger. Hur många matcher spelas totalt?

Ex 2.3 Vi tillverkning av racercyklar finnns två ram-modeller, Giovanni och Basso. Dessutom finns tre modeller av hjul, X, Y och Z. Hur många olika cykeltyper kan produceras?

Lösning

Vi har att välja mellan 2 ramar och 3 hjulpar, d.v.s. $2 \cdot 3 = 6$. Detta kallas *multiplikationsprincipen* (MP).

Ex 2.4 På hur många sätt kan bokstäverna a, b, c, d ordnas?

Lösning

på första plats kan 4 bokstäver väljas, på andra plats 3, på tredje plats 2 och på fjärde plats 1. Enligt MP får vi $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 =: 4!$ (fyra-fakultet) olika ordningar (permutationer).

Ex 2.5 I en förening med 10 medlemmar skall väljas en styrelse på 3 personer. Man väljer då tre personer utan hänsyn till deras poster i styrelsen. D.v.s. man väljer 3 av 10 utan hänsyn till inbördes ordning och utan återläggning. ”utan återläggning” innebär att en person inte kan ha två poster i styrelsen. Hur många styrelser är möjliga?

Lösning

Enl.MP kan vi välja $10 \cdot 9 \cdot 8$ delgrupper bestående av tre personer. Dock är detta *med* hänsyn till inbördes ordning. För att få *utan* hänsyn till inbördes ordning, ”dividerar vi bort den” genom att dividera med $3 \cdot 2 \cdot 1$, alltså

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \text{ styrelser.}$$

Vi definierar nut ett antal begrepp som kan lösa problemen ovan.

***n*!** läses ”n-fakultet”.

$$n! := \begin{cases} 0! = 1, & \text{om } n = 0 \\ \\ n(n-1)(n-2) \cdot \ldots 2 \cdot 1 & \text{om } n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Multipikationsprincipen

Givet m moment, där varje moment har n_k val $k = 1, 2, \ldots, m$ ger totalt

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$$

val.

- Antalet *permutationer* av k element valda av n element är

$$P(n, k) := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Detta motsvarar dragning
med hänsyn till inbördes ordning och
utan återläggning.

- Antalet *kombinationer* av k element valda av n element är en *binomialkoefficient:*

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

  Detta motsvarar dragning
  utan hänsyn till inbördes ordning och
  utan återläggning.

Samband

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

$$P(n,k) = k! \cdot \binom{n}{k}.$$

$\binom{n}{k}$ = Antal delmängder med k element valda bland n element.

Ex 2.1 Vi väljer alltså 3 av 8 sträckor som går upp. De resterande $8 - 3 = 5$ sträckorna är då åt höger. Vi kan välja dessa 3 på $\binom{8}{3}$ sätt. Det är

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56.$$

Ex 2.2 Antal enkelmöten är $\binom{16}{2} = 120$, alltså 240 matcher.

Ex 2.6 Hur många lottorader finns?

Lösning

I Lotto gäller det att välja 7 av 35 *utan* återläggning och *utan hänsyn* till inbördes ordning. Svaret är

$$\binom{35}{7} = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6\,724\,520 \approx 6.7 \cdot 10^6.$$

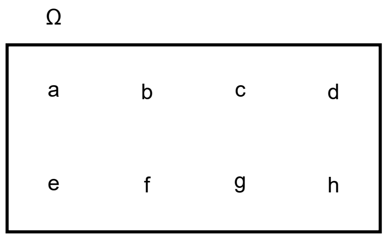
Om man i Lotto tog hänsyn till inbördes ordning skulle antalet rader vara

$$35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 = 33\,891\,580\,800 \approx 34 \text{ miljarder.}$$

2 Repetition av Föreläsning I och II, Vecka I, 5/11-11/11

2.1 Mängder

Ex 2.7 Givet mängden/utfallsrummet Ω, se figur.



Givet mängderna $A = \{a, b, e, f, g\}$, $B = \{d, g, h\}$, bestäm

(a) $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap B^c$, $A \setminus B$, $(A \cup B)^c$, $A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c$, $A^c \cup B^c$.

(b) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, (Symmetriska differensen) samt uttryck mängden på ett alternativt sätt.

Lösning

(a) $A \cap B = \{g\}$, $A \cup B = \{a, b, d, e, f, g, h\}$, $A \cap B^c = \{a, b, e, f\}$, $A \setminus B = \{a, b, e, f\}$, $(A \cup B)^c = \{c\}$, $A^c \cap B^c = \{c\}$, $(A \cap B)^c = \{a, bc, d, e, f, h\}$, $A^c \cup B^c = \{a, bc, d, e, f, h\}$.

(b) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{a, b, e, d, f, h\}$. Mängden uttryckt på ett alternativt sätt:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Ex 2.8 sannolikhterna för A, B, C, $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$ och $A \cap B \cap C$ är

$$1/4,\ 1/4,\ 1/4,\ 1/8,\ 1/8,\ 1/8,\ \text{ resepektive } 1/16.$$

(a) Beräkna sannolikheten för händelsen $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(b) Beräkna sanolikheten för händelsen $A \cup B \cup C$. Bestäm sannolikheten av den händelse/mängd.

Lösning

(a) Sannolikheten för händelsen $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$:

$P((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = P((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = \{\text{disjunkta}\} = P(A \setminus B) + P(B \setminus A)$.

Nu är $P(A \setminus B) = P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 1/4 - 1/8 = 1/8$. P.s.s. är $P(B \setminus A) = 1/8$. Alltså är

$$P((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = \frac{1}{4}.$$

(b) Beräkna sanolikheten för händelsen $A \cup B \cup C \ldots$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - \\ & \quad P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

2.2 Mer kombinatorik

Ex 2.9

(a) Hur många registeringsnummer finns? Förutsätt att man använder 22 bosktäver och alla 10 siffrorna och att ett reg.nr börjar med tre bokstäver och åtföljs av tre siffror.

(b) Hur många reg. nummer fås med denna modell är 2 200 000.

Lösning

(a) Antalet registeringsnummer:

$$22^3 \cdot 10^3 = 10\,64\,8000$$

(b)

$$22 \cdot 10^5 = 2\,200\,000$$

Ex 2.10 I en klass finns 25 elever. Vad är sannolikheten att (minst) två fyller år samma dag?

Lösning

Händelsen aatt (minst) två fyller år samma dag betecknar vi A och förutsätter att det är ett normalår (365 dagar) och att det är samma sannolikhet att vara född för alla dagar (likformig fördelning).

Koplementhändelsen är A^c, att alla fyller år olika dagar. Vi skriver $P(A^c) = \dfrac{g}{m}$.

$$m = 365^{25} \text{ och } g = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - 25 + 1) = P(365, 25).$$

Detta ger

$$P(A^c) = \frac{P(365, 25)}{365^{25}} = 0.4313\ldots \iff P(A) = 1 - 0.4313\ldots = 0.5687\ldots$$

Svar: sannolikheten att två fyller år samma dag är 57%.

Ex 2.11 $0! := 1$ och i övrigt är $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.
Beräkna binomialkoefficienterna $\binom{4}{k}$ för $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Lösning

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0! \cdot (4-0)!} = 1, \quad \binom{4}{1} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 4, \quad \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 1} = 6.$$

Återstående termer är

$$\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4, \quad \binom{4}{4} = \binom{4}{0} = 1.$$

Vi kan passa på att utveckla $(a+b)^4$:

$$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 \cdot b^0 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + 1 \cdot a^0 \cdot b^4.$$

Kommentarer

M.h.a. Pascals triangel erhålls binomialkoefficienterna $\binom{n}{k}$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$ och $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Ex 2.12 Givet händelserna i ex 1.5 (och 1.6), beräkna sannolikheterna

(a) $P(H \cap T)$

b) $P(H|T^c)$

Lösning

$$P(H|T) = 0.95, \quad P(T) = 1.0 \cdot 10^{-3}, \quad P(H) = 0.10.$$

(a)

$$P(H \cap T) = P(H|T) \cdot P(T) = 9.5 \cdot 10^{-4}.$$

Med kännedom om $P(T|H)$ kan sannolikheten beräknas som

$$P(H \cap T) = P(T|H) \cdot P(H).$$

Detta ger Bayes sats:

$$P(H \cap T) = P(T|H) \cdot P(H) = P(H|T) \cdot P(T).$$

b) Av Bayes sats följer att

$$P(H|T^c) = \frac{P(H)}{P(T^c)} \cdot P(T^c|H).$$

Hur beräknar vi $P(T^c|H)$?

$$P(T|H) = \frac{P(T)}{P(H)} \cdot P(H|T), \quad P(T^c|H) = 1 - \frac{P(T)}{P(H)} \cdot P(H|T) = 0.9905 \approx 99\%.$$

Ex 2.13 Vid fiske med kastspö är sannolikheten att få napp (fiskfångst) $p := 20\%$ vid varje kast. Karin kastar 5 gånger. Vad där sannolikheten att hon får exakt två napp (fiskar)? Antag att varje kasts utfall är oberoende.

Lösning

Sökt sannolikhet $P(A)$, där A är händelsen att få napp exat två gånger av fem är

$$P(A) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^{5-2} = 10 \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^3 = 0.2048\ldots$$