Tillämpad matematisk statistik LMA521
Tentamen 2014-03-11

Tid: 14.00-18.00
Hjälpmedel: Kursboken **Matematisk Statistik** av Ulla Dahlbom. Formelsamlingen **Tabell- och formelsamling i matematisk statistik, försöksplanering och kvalitetsstyrning** av Håkan Blomqvist. Boken och formelsamlingen får ej innehålla extra anteckningar, men understrykningar, sticks och markeringar är tillåtna. **Chalmersgodkänd räknare.**
Examinator: Johan Tykesson
Telefonvakt: Johan Tykesson, 0703182096

Till varje uppgift skall fullständig lösning lämnas!
OBS: text på tre sidor!

1. (2+2+2 poäng) Antag att ξ är en kontinuerlig stokastisk variabel med frekvensfunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{9}(3x - x^2) & \text{för } 0 \leq x \leq 1.5 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

   (a) Beräkna väntevärde och varians för ξ.
   (b) Beräkna $P(\xi \leq 1)$ och $P(\xi > 0.5)$.
   (c) Beräkna den betingade sannolikheten $P(\xi \leq 1 \,|\, \xi > 0.5)$.

2. (5 poäng) Antag att en flodhäst på ett zoo äter ett eller två paket flodhästmat per dag. Antag att sannolikheten att flodhästen äter ett paket på en dag är 0.1 och sannolikheten att den äter 2 paket är 0.9. Antag att antalet paket flodhästen äter på olika dagar är oberoende av varandra och att ett år har 365 dagar. Beräkna approximativt sannolikheten att antalet paket flodhästmat som flodhästen äter under ett år är större än eller lika med 712.

3. (3+3 poäng) En forskare undersöker densiteten hos en träsort. Forskaren gör 5 mätningar och får resultaten (i enhet kg/dm^3):

$$0.56 \qquad 0.63 \qquad 0.60 \qquad 0.59 \qquad 0.62$$

   Vi antar att mätningarna är gjorda oberoende av varandra, och att mätningarna kommer från en normalfördelning med okänt väntevärde μ och okänd standardavvikelse σ.

   (a) Beräkna ett 95% konfidensintervall for μ.
   (b) Beräkna ett tvåsidigt 99% konfidensintervall för σ.

4. (3+3 poäng) En vandrare måste passera två floder, som vi kallar flod F_1 och flod F_2. Floderna kan endast passeras med hjälp av broar. Antag att det finns två broar över flod F_1 och två broar över flod F_2. Varje bro är hel med sannolikhet 0.9, och vi antar att de fyra broarna är oberoende av varandra. Om en bro inte är hel så kan man inte använda den.

   (a) Beräkna sannolikheten att vandraren kan passera bägge floderna.

   (b) Beräkna den betingade sannolikheten att man kan passera flod F_1, givet att man inte kan passera bägge floderna.

5. (1+1+2+2 poäng) Antag att avståndet mellan två telefonstolpar (stolpe S_1 och S_2) är 20 meter. Tre fåglar (fågel F_1, F_2 och F_3) sätter sig slumpmässigt på tråden mellan stolparna. Vi antar för enkelhets skull att fåglarnas avstånd till stolpe A är rektangelfördelade på intervallet $(0, 20)$ och oberoende av varandra.

   (a) Vad är sannolikheten att fågel F_1 sitter på avstånd mindre än eller lika med 3 meter från stolpe S_1?

   (b) Vad är sannolikheten att både fågel F_1 och F_2 sitter på avstånd mindre än eller lika med 3 meter från stolpe S_1, medan fågel F_3 sitter på avstånd minre än eller lika med 3 meter från stolpe S_2?

   (c) Vad är sannolikheten att avståndet mellan stolpe S_1 och fågel F_1 är åtminstone dubbelt så stort som avståndet mellan fågel F_1 och stolpe S_2?

   (d) Vad är sannolikheten att exakt två av fåglarna sitter på avstånd mindre än eller lika med 3 meter från stolpe S_1?

6. (3+3 poäng) Man genomförde ett fullständigt faktorförsök för att undersöka hur de 3 faktorerna A, B och C påverkade en speciell situation. Man fick följande resultat från de åtta försöken.:

Nr.	A	B	C	Resultat y
1	-	-	-	53
2	+	-	-	55
3	-	+	-	77
4	+	+	-	75
5	-	-	+	54
6	+	-	+	53
7	-	+	+	70
8	+	+	+	79

   (a) Beräkna huvudeffekterna l_A, l_B och l_C, och samspelseffekterna l_{AC}, l_{AB} och l_{ABC}.

   (b) Antag att man också var intresserad av faktorerna D och E och F. Man har bara råd att göra 8 försök, så man får göra ett reducerat faktorförsök. Antag att man väljer teckenkolumner för A, B och C precis som ovan. Antag sedan att man väljer de tre generatorerna $D = ABC$, $E = BC$ och $F = AC$. Beräkna upplösningen för det reducerade faktorförsöket och beräkna alla alias för A.

7. (1+5 poäng) För att kontrollera en kemisk tillverkningsprocess tar man med jämna mellanrum ut en provgrupp om 3 enheter och mäter pH värde. Från 20 provgrupper har man följande resultat (där $\bar{x}$ är provgruppsmedelvärdet och R är variationsbredden för provgruppen):

Provgrupp:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	6.9	6.8	6.2	7.4	7.0	6.4	6.4	6.8	7.1	7.1
	6.9	6.7	7.0	7.3	6.8	6.2	6.2	6.8	6.1	7.2
	7.2	7.2	6.6	7.2	6.6	6.6	6.3	6.8	6.6	7.3
$\bar{x}$	7.0	6.9	6.6	7.3	6.8	6.4	6.3	6.8	6.6	7.2
R	0.3	0.5	0.8	0.2	0.4	0.4	0.2	0.0	1.0	0.2

Provgrupp:	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	6.3	6.8	6.2	7.3	7.0	6.4	6.4	6.8	6.5	7.0
	6.4	6.7	7.0	7.3	6.8	6.4	6.4	6.9	6.3	7.2
	6.5	6.9	6.6	7.3	7.2	6.7	6.4	7.0	6.1	6.8
$\bar{x}$	6.4	6.8	6.6	7.3	7.0	6.5	6.4	6.8	?	?
R	0.2	0.2	0.8	0.0	0.4	0.3	0.0	0.2	?	?

(a) Beräkna provgruppsmedelvärdena och variationsbredderna för provgrupp 19 och 20.

(b) Avgör om processen är i statistisk kontroll eller inte, genom att beräkna övre och undre kontrollgränser för $\bar{x}$- och R-diagram. (Om du ej löst uppgift a så får du lösa denna uppgift med de 18 första provgrupperna.)

8. (5 poäng) Antag att en företagare köper in ett parti med 1000 resistorer. För att avgöra om partiet skall accepteras eller avvisas används en dubbel provtagningsplan som fungerar på följande vis: I urval 1 kontrolleras 20 resistorer. Om antalet defekta resistorer i urval 1 är mindre än eller lika med 1 så accepteras partiet. Om antalet defekta resistorer är större än eller lika med 4 så avvisas partiet. I övriga fall så går man till urval 2. I urval 2 kontrolleras 40 nya resistorer. Om det totala antalet defekta i urval 1 och 2 är mindre än eller lika med 3 så accepteras partiet. Annars avvisas partiet. Med andra ord, man har en dubbel provtagningsplan med parametrar $n_1 = 20$, $n_2 = 40$, $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $r_1 = 4$, $r_2 = 4$. Antag nu att felkvoten i partiet är 0.01. Antag också att om partiet avvisas av den dubbla provtagningsplanen så kontrollerar man alla resistorerna i partiet. Beräkna väntevärdet av antalet kontrollerade enheter. Med andra ord, beräkna ATI(0.01). Motivera eventuella approximationer du gör.

9. (4 poäng) Antag att ξ är en kontinuerlig stokastisk variabel med fördelningsfunktion

$$P(\xi \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < -1 \\ \frac{1+x}{2} & \text{för } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{för } x > 1. \end{cases}$$

Låt $\eta = \xi^2$. Bestäm fördelningsfunktionen för η.

Lycka till!