

Matematisk statistik och diskret matematik IT (MVE050)
lösningar
2007–12–20

1. Ange lämplig fördelning för den stokastiska variabeln X som beskrivs nedan. Du behöver bara ange vad det är för typ av fördelning, inte värden på parametrar. (3p)
- (a) Du spelar upprepade gånger på lyckohjul på ett tivoli. X = antal förluster under de första 10 omgångarna.
 - (b) X = omgångar tills du vinner för första gången på lyckohjulet ovan.
 - (c) X = medelpoängen för klassen på denna tentamen (om inga skriver av varandra!).
 - (d) Perseiderna är en meteorskur som gör att ett stort antal "stjärnfall" kan ses under några kvällar varje höst. X = antal stjärnfall som kan ses under en kvart en stjärnklar natt då Perseiderna är aktiv.
 - (e) X = tid i minuter tills man ser det första stjärnfallet om man börjar titta vid midnatt under förutsättningarna ovan.

Lösning:

- (a) Binomial.
 - (b) Geometrisk.
 - (c) Normal.
 - (d) Poisson.
 - (e) Exponential.
2. A och B är händelser med $P(A) = 0.4$ och $P(B) = 0.5$. Beräkna $P(A \cap B)$ då
- (a) $P(A \cup B) = 0.8$. (1p)
 - (b) $P(B|A) = 0.5$. (1p)
 - (c) $P(B|A) = 1$. (tidigare, felaktigt villkor $P(A|B) = 1$) (1p)

Lösning:

(a)

$$\begin{aligned} 0.8 &= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.5 - P(A \cap B) \\ &= 0.9 - P(A \cap B) \Rightarrow \\ P(A \cap B) &= 0.9 - 0.8 = 0.1. \end{aligned}$$

(b) $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$.

- (c) $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 1 \cdot 0.4 = 0.4$. ($P(A|B) = 1$ medför att $B \subseteq A$ och därmed $P(B) \leq P(A)$ vilket inte är sant.)

3. Låt X vara likformigt fördelad på $[-2\pi, 2\pi]$, och låt $Y := \cos X$. Beräkna $E[X]$, $E[Y]$ och $\text{Cov}(X, Y)$. (3p)

Lösning: X har täthetsfunktion $f_X(x) = \frac{1}{2\pi - (-2\pi)} = \frac{1}{4\pi}$ för $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ och $f_X(x) = 0$ för övriga värden på x . Detta ger

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{x}{4\pi} dx = \left[\frac{x^2}{8\pi} \right]_{-2\pi}^{2\pi} = 0 \\ E[Y] &= E[\cos X] = \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\cos x}{4\pi} dx = \left[\frac{\sin x}{4\pi} \right]_{-2\pi}^{2\pi} = 0 \\ \text{Cov}(X, Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] = E[XY] = E[X \cos X] \\ &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{x \cos x}{4\pi} dx = \left[\frac{x \sin x}{4\pi} \right]_{-2\pi}^{2\pi} - \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{4\pi} dx \\ &= 0 - \left[-\frac{\cos x}{4\pi} \right]_{-2\pi}^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Istället för att partialintegrera ovan räcker det att inse att $x \cos x$ är en udda funktion så att integralen blir 0 pga symmetri.

4. Lisa sitter på en äng och letar efter fyrklövrar. Antag att fyrklövrar finns utspridda enligt en Poissonprocess med förväntat antal 0.5 per m^2 . Lisa letar igenom ängen med en hastighet $0.2 m^2$ per minut.

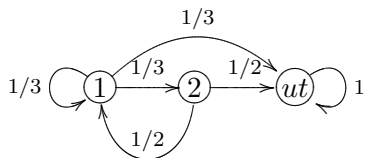
- (a) Vad är sannolikheten att hon hinner hitta två stycken på 15 minuter? (1p)
 (b) Hur länge måste hon leta för att med sannolikhet 90% hitta en fyrklöver? (2p)

Lösning: Lisa kommer att upptäcka fyrklövrar enligt en Poissonprocess i tiden med intensitet $0.5 \cdot 0.2 = 0.1$ per minut.

- (a) $X =$ antal upptäckta på 15 minuter $\sim \text{Po}(1.5)$. $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-1.5} - 1.5e^{-1.5} \doteq 0.4422$.
 (b) $T =$ tid i minuter tills hon upptäcker den första fyrklövern $\sim \text{Exp}(\frac{1}{0.1})$. Vi söker minsta t så att $P(T > t) \leq 0.1$. $0.1 = P(T > t) = e^{-0.1t} \Rightarrow t = \frac{\log 0.1}{-0.1} \doteq 23$ minuter.

5. Anna befinner sig i ett labyrintiskt grottsystem. Det finns två grottor som är förbunda med varandra, men som också har tunnlar som leder ut ur systemet. Första grottan har tre tunnlar: en ut, en tillbaka till samma grotta och en till den andra grottan. Den andra grottan har två tunnlar; en ut och en tillbaka till den första grottan. När Anna har kommit till en grotta så väljer hon ögonblickligen en tunnel därifrån men hon är så desorienterad att hon med lika stor sannolikhet väljer varje möjlig tunnel, även den hon kom ifrån. Varje passage genom en tunnel tar en timme. Hon befinner sig nu i grotta

ett. Vad är den förväntade tiden tills hon kommer ut? (3p)



Lösning: Låt m_1 och m_2 vara förväntat antal steg innan absorption då man startar i grotta 1 resp. 2. Absorption är här detsamma som att komma ut, så vi söker alltså m_1 .

$$\begin{cases} m_1 = 1 + \frac{1}{3}m_1 + \frac{1}{3}m_2 \\ m_2 = 1 + \frac{1}{2}m_1 \end{cases} \Rightarrow m_1 = \frac{8}{3}.$$

6. Antag att $X_1, X_2, \dots, X_n$ är oberoende och likformigt fördelade mellan 0 och θ . $\hat{\theta} := 2\bar{X}$ är en skattare för θ .

(a) Visa att $\hat{\theta}$ är väntevärdesriktig. (1p)

(b) Beräkna $\hat{\theta}$ då stickprovet är 0.34, 0.13, 0.26, 0.76, 0.12. Jämför skattningen av θ med värdena i stickprovet och kommentera om du anser att $\hat{\theta}$ är en bra skattare. (2p)

Lösning:

(a) $E[\hat{\theta}] = E[2\bar{X}] = \frac{2}{n}E[X_1 + \dots + X_n] = \frac{2}{n}(E[X_1] + \dots + E[X_n]) = \frac{2}{n}(\frac{\theta}{2} + \dots + \frac{\theta}{2}) = \theta$.

(b) $\frac{2}{5}(0.34 + 0.13 + 0.26 + 0.76 + 0.12) = 0.644$. Vi har en observation på 0.76 trots att vi har skattat $\hat{\theta} = 0.644$ och det är ju omöjligt att $X > \theta$ om X är likformigt fördelad mellan 0 och θ . (En bättre skattare är $\frac{n+1}{n} \max\{X_1, \dots, X_n\}$.)

7. Olle har köpt 144 ägg som enligt försäljaren har en förväntad vikt på 63 g styck och en standardavvikelse på 4 g. Olle finner att den sammanlagda vikten är precis 9 kg. Är detta förenligt med försäljarens påstående, dvs vad är sannolikheten att vikten skulle vara 9 kg eller mindre om försäljaren har rätt? (3p)

Lösning: Den sammanlagda vikten bör vara approximativt normalfördelad (enligt centrala gränsvärdesatsen) med väntevärde $63 \cdot 144 = 9072$ g och varians $4^2 \cdot 144 = 2304$ och standardavvikelse $\sqrt{2304} = 48$ g. Låt $X \sim N(9072, 48^2)$ och $Z \sim N(0, 1)$. Då är

$$P(X < 9000) = P\left(\frac{X - 9072}{48} < \frac{9000 - 9072}{48}\right) = P(Z < -1.5) = 0.0668 \approx \frac{1}{15}.$$

Om Olle fortsätter att handla ägg kan denna situation uppkomma cirka vart femtonde gång trots att försäljaren talar sanning, dvs det finns inga starka argument mot honom.

8. Sifo har frågat 498 kvinnor och 471 män om hur de skulle rösta om det var en ny EMU-omröstning idag. 288 kvinnor och 212 män sa att de skulle rösta nej. Gör ett konfidensintervall med konfidensgrad 95% för skillnaden i åsikt mellan könen. Finns det en signifikant skillnad? (3p)

Lösning: $\hat{p}_k = \frac{288}{498} = 0.578, \hat{p}_m = \frac{212}{471} = 0.450$, så vi får konfidensintervallet

$$\hat{p}_k - \hat{p}_m \pm z_{0.025} \sqrt{\frac{\hat{p}_k(1 - \hat{p}_k)}{498} + \frac{\hat{p}_m(1 - \hat{p}_m)}{471}} = 0.128 \pm 1.96 \cdot 0.032 = (0.065, 0.191),$$

så skillnaden i åsikt är signifikant.

9. Låt X vara en diskret stokastisk variabel med $P(X = k) = p_k, k \geq 0$. Den sannolikhetsgenererande funktionen (sgf) för X ges av

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k.$$

(a) Visa att $S(1) = 1$ och $S'(1) = E[X]$. (2p)

(b) Vad är $S(x)$ om X är Poissonfördelad med parameter λ ? (1p)

Lösning:

(a) $S(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k 1^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, enligt ett sannolikhetsaxiom.

$$S'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \frac{d}{dx} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k x^{k-1}$$

$$S'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k 1^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = E[X].$$

(b) $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} x^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda x} = e^{\lambda(x-1)}.$

10. Kalle tänker spela på färg på ett roulettehjul. Han har sannolikheten $\frac{18}{37}$ att vinna i varje omgång och om han vinner får han tillbaka dubbla insatsen. Han har följande strategi: Han börjar med att satsa 1 kr. Sedan dubblar han insatsen varje gång han förlorar så att om han vinner först i omgång nummer k så har han satsat totalt $1 + 2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$ kr, men eftersom han satsar 2^{k-1} kr i omgång k så får han tillbaka 2^k kr. Netto får han alltså $2^k - (2^k - 1) = 1$ kr, helt riskfritt!... eller?

Kalle inser att han kan bli bankrutt om han inte har med sig tillräckligt kapital. Antag att han har $2^C - 1$ kr så att han kan klara sig i C omgångar.

(a) Vad är sannolikheten att han blir bankrutt? (1p)

(b) Vad är hans förväntade nettovinst då han spelar tills han har vunnit en gång eller gjort slut på sina pengar? (1p)

(c) Visa att den förväntade nettovinsten *minskar* då C ökar, dvs då han kan hålla ut längre innan han blir bankrutt! När är nettovinsten 0? (1p)

Lösning:

(a) Kalle blir bankrutt om det dröjer minst C omgångar innan han vinner, dvs att han har C stycken förlustomgångar i rad. Sannolikheten för detta är $(\frac{19}{37})^C$.

(b) Den förväntade nettovinsten är $1 \cdot (1 - (\frac{19}{37})^C) - (2^C - 1)(\frac{19}{37})^C = 1 - 2^C (\frac{19}{37})^C = 1 - (\frac{38}{37})^C$.

(c) $\frac{38}{37} > 1$ så $1 - (\frac{38}{37})^C$ avtar mot $-\infty$ då C ökar. Nettovinsten är noll endast om $C = 0$, dvs om han inte spelar alls!