TENTAMEN: Matematisk statistik och diskret matematik (MVE050/MSG810).
Statistik för fysiker (MSG820)
Tid och plats: Onsdagen den 15 april 2009, kl. 08.30–12.30, Väg och vatten-salar
Jour: Oscar Hammar, tel 0708-300715.
Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare och Beta.
Betygsgränser: 3: 12 poäng, 4: 18 poäng, 5: 24 poäng. Maximalt antal poäng är 30.

1. (3p) Låt A och B vara två händelser med $P(A) = 0.25$ och $P(B) = 0.5$. Beräkna $P(B|A)$ i följande fall:

   a) A och B är oberoende.
   b) A och B är disjunkta.
   c) $P(A|B) = 0.2$

2. (4p) Antag att man kastar en symmetrisk tärning två gånger. Låt A vara händelsen att första tärningen visar 1, B att summan av kasten är 6, och C att summan av kasten är 7.

   a) Definiera oberoende mellan två händelser A och B.
   b) Är A och B oberoende? Är A och C oberoende? Är B och C oberoende? Motivera svaren ordentligt!

3. (3p) Vi skriver ρ_{XY} för korrelationen mellan stokastiska variabler X och Y. Vi vet att $\rho_{XY} \in [-1, 1]$. För ett par av stokastiska variabler X, Y har vi alltså att exakt ett av påståendena (i)-(v) nedan gäller.

   (i) $\rho_{XY} = -1$
   (ii) $-1 < \rho_{XY} < 0$
   (iii) $\rho_{XY} = 0$
   (iv) $0 < \rho_{XY} < 1$
   (v) $\rho_{XY} = 1$

   Nedan följer tre par av stokastiska variabler. Din uppgift är att argumentera för vilket av påstående (i)-(v) som gäller för var och en av paren.

   a) Du singlar slant 100 gånger. X = antalet gånger du får 'klave' i de första 50 singlingarna. Y = antalet gånger du får 'klave' i de sista 50 singlingarna.
   b) Varje år antas 10 studenter till en eftertraktad utbildning. X = antalet kvinnor som antas. Y = antalet män som antas.
   c) (X, Y) = (temperaturen kl 12 i Göteborg, temperaturen kl 15 i Göteborg) en slumpvis vald dag.

4. (4p) Bertil vill undersöka hur mycket tid i genomsnitt per vecka en chalmerist tittar på TV under terminen. Låt X vara tiden en slumpmässigt vald chalmerist tittar på TV en viss vecka. Bertil antar på goda grunder att X *inte* är normalfördelad. Han kommer ändå att basera sitt konfidensintervall på normalfördelning. Han antar nämligen att $\bar{X}$ är approximativt normalfördelad.

a) Formulera den sats som gör det möjligt att approximera fördelningen för $\bar{X}$ med en normalfördelning. (Du behöver inte ge parametrarna för normalfördelningapproximationen. Det viktiga är att du visar att du känner till kärnan i satsen och under vilka förutsättningar den gäller.)
b) Bertil har tagit ett stickprov av storlek 20 och sammanställt det på följande vis

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 171 \qquad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 2069$$

Vad blir Bertils approximativa 95%-iga konfidensintervall baserat på detta stickprov?

5. (3p) En (mycket ambitiös) vaktmästare byter ut en trasig glödlampa omedelbart (dag som natt, veckodag som helg). Medellivslängden för den typen av glödlampa som används är 1200 timmar=50 dygn. Antag att tidpunkterna då en glödlampa går sönder (och omedelbart ersätts av en ny) följer en poissonprocess.

   a) Låt k beteckan ett ickenegativt heltal. Ge ett uttryck för sannolikheten att det går sönder exakt k glödlampor under april månad.
   b) Låt t beteckna ett ickenegativt reelt tal. Ge ett uttryck för sannolikheten att det tar högst t dagar innan en just bytt glödlampa går sönder.

6. (4p) Låt X vara en stokastisk variabel och låt $\mu = \mathbf{E}[X]$, $\sigma^2 = \mathbf{Var}(X)$. Antag att du har ett stickprov från X bestående av n observationer. Använd de införde beteckningarna och

   a) visa att $\bar{X}$ (stickrovsmedelvärdet) är en väntevärdesriktig skattare för μ.
   b) härled variansen för $\bar{X}$ i termer av σ^2 och n.

7. (3p) Ta fram de genererande funktionerna för följande talföljder:

   a) 1, 3, 9, 27, 81, ...
   b) -2, 4, -8, 16, -32, ...

8. (3p) En viss produkt ska ha höjden 1195mm. På grund av olika små fel i tillverkningsprocessen varierar höjden något. Anta att höjden för en slumpvis vald produkt är normalfördelad med väntevärde 1195mm och standardavvikelse 1mm. Man tänker stapla två av de tillverkade produkterna i en kontainer med lasthöjd 2393mm. Vad är sannolikheten att de två produkternas sammanlagda höjd ej överstiger 2393mm? (Antag att de två höjderna är oberoende.)

9. (3p) Sven åker bil till jobbet 20% av arbetsdagarna. De övriga dagarna åker han buss. När Sven åker bil är det 30% risk att han kommer för sent. Motsvarande siffra då han åker buss är 10%.

   En viss dag är Sven sen till jobbet. Vad är sannolikheten att han åkt bil till jobbet denna dag?

Lycka till!