Lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik (MVE055/MSG810).
Den 15 april 2009.

1. Lösning:

   a) $P(B|A) \overset{\text{def.}}{=} \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \overset{\text{ober.}}{=} \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B) = 0.5$
   b) $P(B|A) \overset{\text{def.}}{=} \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \overset{\text{disj.}}{=} \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$
   c) Bayes sats ger $P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{0.2\cdot 0.5}{0.25} = 0.4$

2. Lösning:

   a) A och B är oberoende om $\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$
   b) $\mathbf{P}(A) = 1/6, \mathbf{P}(B) = 5/36, P(C) = 1/6,$
   $\mathbf{P}(A\cap B) = 1/36 \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \rightarrow$ beroende
   $\mathbf{P}(A\cap C) = 1/36 = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C) \rightarrow$ oberoende
   $\mathbf{P}(B\cap C) = 0 \neq \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) \rightarrow$ beroende

3. Lösning:

   a) (iii) Antal gånger man får 'kvave' de första 50 singlingarna och de sista 50 singlingarna är oberoende och därmed är $\rho_{XY} = 0$.
   b) (i) Antalet antagna kvinnor bestämmer antalet antagna män. Korrelationen är negativ, ty 'stort X ger litet Y'.
   c) (iv) Varmt (kallt) klockan 12 borde öka sannolikheten för varmt (kallt) klockan 15. Det föreligger dock inte ett perfekt linjärt samband så att man från temperaturen klockan 12 kan förusäga temperaturen klockan 15 exakt.

4. Lösning:

   a) Enligt centrala gränsvärdessatsen gäller att summan av likafördelade oberoende stokastiska variabler är approximativt normalfördelade. (Under antagandet om ändlig varians.)
   b) Ett approximativt 95%-igt konfidensintervall för μ ges av

   $$\bar{X} \pm z_{0.025}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

   Vi har att

   $$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 2069, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 171$$

   som ger, då $n = 20$

   $$s^2 = \frac{20 * 2069 - 171^2}{20 * 19} \approx 185.8$$

   Med $z_{0.025} = 1.96$ får vi att

   $$z_{0.025}\frac{s}{\sqrt{n}} \approx 2.48$$

   vilket tillsammans med $\bar{x} = 8.55$ ger det approximativa 95%-iga konfidensintervallet för medeltiden: $(6.07, 11.03)$.

5. Lösning:

   a) Antalet 'händelser' i ett tidsintervall av längd l för en poissonprocess är poissonfördelat med parametern $l * i$ där i är intensiteten för processen. Intensiteten är 1/50 glödlampshaverier per dygn. Alltså gäller att $X=$ antal glödlampor som går sönder i april är poissonfördelat med parametern 30/50, dvs

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{e^{-\frac{3}{5}}(\frac{3}{5})^k}{k!}$$

   b) Tiden till en 'händelse' för en poissonprocess är exponentialfördelad med parametern lika med intensiteten för processen. Låt Y vara tiden till en just bytt glödlampa går sönder. Då gäller

$$\mathbf{P}(Y \leq t) = \int_0^t \frac{1}{50} e^{-\frac{x}{50}} dx = 1 - e^{-\frac{t}{50}}$$

6. Lösning:

   a)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\bar{X}] &= \mathbf{E}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] && (1)\\
&= \frac{1}{n}\mathbf{E}[X_1 + \ldots + X_n] && (2)\\
&= \frac{1}{n}(\mathbf{E}[X_1] + \ldots + \mathbf{E}[X_n]) && (3)\\
&= \frac{1}{n}(n\mu) && (4)\\
&= \mu && (5)
\end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}(\bar{X}) &= \mathbf{Var}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) && (6)\\
&= \frac{1}{n^2}\mathbf{Var}(X_1 + \ldots + X_n) && (7)\\
&\overset{ober}{=} \frac{1}{n^2}(\mathbf{Var}(X_1) + \ldots + Var(X_n)) && (8)\\
&= \frac{1}{n^2} n\sigma^2 && (9)\\
&= \frac{\sigma^2}{n} && (10)
\end{aligned}$$

7. Lösning:

   a) Vi har följden $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ med $a_k = 3^k$. Den genererande funktionen är

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k = \frac{1}{1-3x} \quad (x \in (0,1))$$

b) Vi har följden $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ med $b_k = (-2)^{k+1}$. Den genererande funktionen är

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-2)^{k+1}x^k = -2\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k x^k = -\frac{2}{1+2x} \quad (x \in (0,1))$$

8. Lösning:
Låt X_1 och X_2 beteckna höjderna för de två produkterna. Låt $Y = X_1 + X_2$.
$X_i \sim N(1195, 1)$ för $i = 1, 2$ ger enligt sats att $Y \sim N(2390, 2)$. Alltså gäller

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y \leq 2393) &= \mathbf{P}\left(\frac{Y-2390}{\sqrt{2}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}\right) && (11)\\
&= \mathbf{P}\left(Z \leq \frac{3}{\sqrt{2}}\right) && (12)\\
&\approx 0.983 && (13)
\end{aligned}$$

9. Lösning:
Bayes formel ger:

$$P(bil|sen) = \frac{P(sen|bil)P(bil)}{P(sen)} = \frac{0.3 * 0.2}{0.3 * 0.2 + 0.1 * 0.8} \approx 0.43$$

där $P(sen)$ i nämnaren ges av lagen om total sannolikhet.