Lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik (MVE055/MSG810).
Den 25 augusti 2009.

1. Lösning:
   A = person inskriven på GU. B = person inskriven på Chalmers.

   a) Vi söker P(inte inskriven på något av lärosätena) = 1 - P(inskriven på något av lärosätena) $= 1 - P(A \cup B)$.
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.26 + 0.8 - 0.1 = 0.96$.
   Alltså har vi P(inte inskriven på något av lärosätena) $= 1 - 0.96 = 0.04$
   b) $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.26} \approx 0.385$
   c) A och B oberoende om och endast om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Men $P(A \cap B) = 0.1$ och $P(A)P(B) = 0.26 * 0.8 \approx 0.21$, så händelserna är ej oberoende.

2. Lösning:

   a) Definiera E = exakt 29 tärningsögon. Vi har utfallsrummet $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^5$. Ω består av 6^5 utfall. För att få totalt 29 tärningsögon krävs det att en tärning visar en femma och resten visar sexor. Det finns 5 sätt att välja ut den tärning som skall visa en femma. Händelsen E består alltså av fem utfall.

   $$\mathbf{P}(E) = \frac{\#(E)}{\#(\Omega)} = \frac{5}{6^5} \approx 0.00064.$$

   b) Definiera F = exakt 3 sexor. Låt $X \sim \text{Bin}(5, \frac{1}{6})$

   $$\mathbf{P}(F) = \mathbf{P}(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0.0322.$$

3. Lösning:

   a) Vi har att
   $P(X \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.6 + 0.4 * 0.6 + 0.4^2 * 0.6 \approx 0.936$
   Vi söker $P(X = 1|X \le 3)$ som ges av
   $P(X = 1|X \le 3) = \frac{P(X=1 \cap X \le 3)}{P(X \le 3)} = \frac{P(X=1)}{P(X \le 3)} = \frac{0.6}{0.936} \approx 0.641$
   b) Värdet på X bestämmer helt och hållet värdet på $Y \implies |\rho_{xy}| = 1$.
   'Stora' X ger 'små' Y och 'små' X ger 'stora' Y. $\implies \rho_{xy} < 0$.
   Alltså har vi $\rho_{xy} = -1$.
   c) $\mathbf{Var}(Y) = \mathbf{Var}(-X) = (-1)^2\,\mathbf{Var}(X) = \mathbf{Var}(X) = 0.4/0.6^2 \approx 1.11$, där vi använt att $\mathbf{Var}(X) = (1-p)/p^2$ om $X \sim \text{Geo}(p)$

4. Lösning:

   a) En lämplig teststatistika för att testa hypotesen är $(\bar{X} - 1000)/(S/\sqrt{50})$. Låt U beteckna denna teststatistika. Om H_0 är sann då gäller att $U \sim \text{N}(0, 1)$ (approximativt). Våra observerade värden för $\bar{X}$ och S^2 är $\bar{x} = 999.25$ och $s^2 = 1.55$. Vårt observerade värde på den stokastiska variabeln U blir då, $u = -4.26$. Detta ger p-värdet $= \mathbf{P}(U \le -4.26) = \Phi(-4.26) < 0.001$

b) p-värdet är sannolikheten att få ett minst så "extremt" värde som vi observerat om H_0 är sann.

c) Vi har observerat ett värde som OM H_0 är sann inträffar mindre än en gång på 1000. Vi drar slutsatsen att Bert kan förkasta H_0 till förmån för H_1.

5. Lösning:

a) Se föreläsningsanteckningar

b) Vädret beskrivs med en Markovkedja med följande övergångsmatris. (Tillstånd 1 sol, tillstånd 2 mulet, tillstånd 3 regn)

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Svaret på frågan ges av det första elementet i

$$(0 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}^2 = (0.6 \quad 0.1 \quad 0.3) \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix} = (0.59 \quad 0.21 \quad 0.20)$$

Alltså, sannolikheten för sol två dagar efter regn i staden under modellen är 0.59.

Lösning:
Låt

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{om person } i \text{ är positiv till EMU} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$\bar{X} = \frac{1}{50} \sum_i^{50} X_i$ Ett 95%-igt konfidensintervall ges av:

$$p = \bar{X} \pm z_{0.95} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$$

Med $z_{0.95} = 1.96$ och $\bar{X} = \frac{31}{50}$ får vi att det 95%-iga konfidensintervallet för andelen som är positiva till EMU är (0.486,0.755).

7. Lösning:
Antalet sätt ges av koefficienten framför x^{40} i följande uttryck:

$$\begin{aligned}
(1 + x + x^2 + \ldots + x^{15})^5 &= \left(\tfrac{1-x^{16}}{1-x}\right)^5 \\
&= \left(1 - x^{16}\right)^5 \left(\tfrac{1}{1-x}\right)^5 \\
&= \left(1 + 5(-x^{16}) + 10(-x^{16})^2 + 10(-x^{16})^3 + 5(-x^{16})^4 + (-x^{16})^5\right) \tfrac{1}{(1-x)^5} \\
&= \left(1 - 5x^{16} + 10x^{32} - 10x^{48} + 5x^{64} - x^{80}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{4} x^n
\end{aligned}$$

Koefficienten framför x^{40} är alltså

$$\binom{40+4}{4} - 5\binom{24+4}{4} + 10\binom{8+4}{4} = 38326$$

8. Lösning:

   a) Låt W vara paketets vikt. $W = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$. W är normalfördelad enligt sats. $\mathbf{E}[W] = \sum_{i=1}^{5} \mathbf{E}[V_i] = 5 * 995 = 4975$. $\mathbf{Var}(W) = \sum_{i=1}^{5} \mathbf{Var}(V_i) = 80$
   $\mathbf{P}(W \leq 5000) = \mathbf{P}(Z \leq \frac{5000-4975}{\sqrt{80}}) = \Phi(2.795) \approx 1 - 0.0026$
   b) Låt nu W vara paketets vikt enligt pakningsstrategin i deluppgift b.
   $W = 2V_1 + 2V_2 + V_3$. W är normalfördelad enligt sats.
   $\mathbf{E}[W] = \sum_{i=1}^{5} \mathbf{E}[V_i] = 5 * 995 = 4975$. $\mathbf{Var}(W) = \mathbf{Var}(2V_1 + 2V_2 + V_3) =$
   $\mathbf{Var}(2V_1) + \mathbf{Var}(2V_2) + \mathbf{Var}(V_3) = 4\,\mathbf{Var}(V_1) + 4\,\mathbf{Var}(V_2) + \mathbf{Var}(V_3) = 144$
   $\mathbf{P}(W \leq 5000) = \mathbf{P}(Z \leq \frac{5000-4975}{\sqrt{144}}) = \Phi(2.083) \approx 1 - 0.0186$

9. Lösning:

$$m_X(t) = exp\{\mu_X t + \frac{1}{2}\sigma_X^2 t^2\} \quad m_Y(t) = exp\{\mu_Y t + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 t^2\}$$

Definiera $Z = X + Y$. Då ges den momentgenererande funktionen för Z av

$$\begin{aligned} m_Z(t) &= \mathbf{E}[e^{Zt}] \\ &= \mathbf{E}[e^{(X+Y)t}] \\ &= \mathbf{E}[e^{Xt}]\mathbf{E}[e^{Yt}] \\ &= m_X(t)m_Y(t) \\ &= \exp\{\mu_X t + \frac{1}{2}\sigma_X^2 t^2\}exp\{\mu_Y t + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 t^2\} \\ &= \exp\{(\mu_X + \mu_Y)t + \frac{1}{2}(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)t\} \end{aligned}$$

vilket är den momentgenererande funktionen för en normalfördelad stokastisk variabel med väntevärde $\mu_X + \mu_Y$ och varians $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$. Allstå är $Z \sim \mathrm{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$ (ty den momentgenererande funktionen bestämmer fördelningen).