Lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik (MVE055/MSG810/MSG820).
Den 18 december 2009.

1. Lösning:

   a) $P(A|B) \overset{ober.}{=} P(A) = 0.5$
   b) $P(A|B) \overset{Bayes}{=} \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.35*0.5}{0.4} = 0.4375$
   c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ger
   $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.5 + 0.4 - 0.7 = 0.2$. Därmed följer att
   $P(A|B) \overset{def.}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$

2. Lösning:

   a) Ja. X_1 har samma fördelning som X och därmed gäller $\mathbf{E}[X_1] = \mu_X$
   b) W_1 har 10 gånger mindre varians än W_2. Med mindre varians får man en säkrare skattning. Det ger smalare konfidensintervall och starkare test.

3. Lösning:

   a) Ett approximativt 95%-igt konfidensintervall för andelen i populationen som planerar att köpa dator inom det närmaste halvåret ges av:
   $\hat{p} \pm 1.96\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$ dvs $0.06 \pm 1.96\sqrt{0.06 * 0.94/100}$ eller 0.05 ± 0.0465
   b) Nej. Konfidensintervallet bygger på en approximation som härleds från centrala gränsvärdessatsen: $X \sim Bin(n,p) \Rightarrow X \overset{appr.}{\sim} N(np, \sqrt{np(1-p)})$. Som tumregel använder vi att approximationen är acceptabel om $np > 5$ och $n(1-p) > 5$. p är okänd men $\hat{p} = 0.06$ vilket ger $n\hat{p} = 6$. Vi verkar vara i gränslandet för när approximationen är acceptabel. Vi kan bara garantera att konfidensgraden är cirka 95%.

4. Lösning:

   a) $X=$ antalet mail en natt $X \sim Po(7 * \frac{1}{3}) = Po(\frac{7}{3})$.
   $P(X=0) = \frac{e^{-\frac{7}{3}} 4^0}{0!} = e^{-\frac{7}{3}} \approx 0.097 \approx 0.01$
   b) $Y=$ antalet nätter utan mail på en vecka $Y \sim Bin(7, 0.01)$ $P(Y \leq 2) = 0.9743$

5. Lösning:

   a) Låt X =temperaturökningen för en slumpmässigt vald tidpunkt. $H_0 : \mu_X = 0.5$.
   $H_1 : \mu_X > 0.5$. Antag att X är normalfördelad.
   b) $\bar{x} = 0.95 \quad s^2 = \frac{1}{5}(-0.15^2 + 0.15^2 + 0.15^2 + -0.55^2 + 0.05^2 + 0.35^2) = 0.099$.
   Om H_0 är sann så gäller att $T = \frac{\bar{X} - 0.5}{S/\sqrt{6}} \sim T_5$. Forskargruppens data ger
   $t = \frac{0.95 - 0.5}{\sqrt{0.099}/\sqrt{6}} = 3.50$. Den kritiska punkten, K, för ett ensidigt test med signifikansnivå $\alpha = 0.05$ ges av $K = t^{(5)}_{0.95} = 2.015$. Eftersom $t = 3.50 > 2.015$ kan vi förkasta H_0 till förmån för H_1.

c) Öka stickprovsstorleken.

6. Lösning:
   Se föreläsningsanteckningar

7. Lösning:
   Se liknande uträkning sista föreläsningen.

8. Lösning:
   Kortfattade kommentarer: 1. Definitionen av betingad sannolikhet. 2. Lagen om total sannolikhet. Händelserna $\{X_1 = k\}, k \in T = \{1, \ldots, m\}$, är en partition av utfallsrummet (X_1 måste ju anta precis ett värde). 3. Markovegenskapen.

9. Lösning:

   a) Variansen verkar inte vara konstant.
   b) Det verkar som om observationerna är beroende. En varm dag följs ofta av en varm dag och en kall dag följs ofta av en kall dag.