Lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik (MVE050/MSG810), Statistik för fysiker (MSG820).
Den 17 december 2010.

1. a) Två händelser A och B är disjunkta om och endast om $A \cap B = \emptyset$.
   A och B är oberoende om och endast om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

   b) Låt B och N beteckna händelsen att bilisten är berusad resp nykter, och U händelsen att alkotestet ger utslag. Enligt Bayes lag har vi $P(B \mid U) = \dfrac{P(U \mid B)P(B)}{P(U \mid B)P(B) + P(U \mid N)P(N)} = \dfrac{0.99 \cdot 0.004}{0.99 \cdot 0.004 + 0.006 \cdot 0.996} \approx 0.40.$

2. a) Låt $Y =$ antal anrop på en minut. Då är $Y \sim \text{Poi}(\lambda = \frac{1}{60} \cdot 100) \sim \text{Poi}(\lambda = \frac{5}{3})$.
   Vi har då $P(Y > 1) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1)) = 1 - \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} - \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} \approx 0.496$.

   b) Låt $T =$ tiden till nästa anrop i minuter. Då är $T \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{5}{3})$. 5 sekunder är 1/12 minut.
   $P\left(T \leq \frac{1}{12}\right) = F_T\left(\frac{1}{12}\right) = \displaystyle\int_0^{1/12} \frac{5}{3} \cdot e^{-\frac{5}{3}x} dx = 1 - e^{-\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{12}} \approx 0.129.$

3. a) Dubbelsidigt KI för μ av grad $1 - \alpha$ baserat på ett normalfördelat stickprov ges av $\left[\overline{X} - t_{\alpha/2}^{(n-1)} \dfrac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\alpha/2}^{(n-1)} \dfrac{S}{\sqrt{n}}\right]$. Här är $\overline{X} = 1.34$, $S \approx 0.063$ och $t_{\alpha/2}^{(n-1)} = t_{0.025}^{(4)} = 2.776$, vilket ger KI $[1.262, 1.418]$.

   b) Eftersom 1.3 ligger inom konfidensintervallet kan vi inte avgöra (med 95% konfidens) huruvida μ överstiger 1.3 eller ej .

4. a) Typ I-fel innebär att felaktigt förkasta nollhypotesen. Låt $X =$ antal klave, och använd X som teststatistika. Vi har $X \overset{H_0}{\sim} \text{Bin}(20, 0.5)$. Vi får $P(\text{Typ I-fel}) = P(X \leq 6 \mid p = 0.5) = 0.0577$.

   b) Testets signifikansnivå, brukar betecknas α.

   c) Typ II-fel innebär att felaktigt behålla nollhypotesten. Här har vi $\beta = P(\text{Typ II-fel}) = P(X \geq 7 \mid p = 0.3) = 1 - P(X \leq 6 \mid p = 0.3) = 1 - 0.6080 = 0.3920$.

   d) Testets styrka är $1 - \beta = 0.6080$.

5. Antes vandring mellan hörnen kan ses som en absorberande Markovkejda med de fyra tillstånden A, B, C, D, där D är absorberande tillstånd. Låt
   $m_i = E$[antal steg tills Ante når det absorberande tillståndet D då han är i tillstånd i].
   Vi erhåller följande ekvationssystem;

$$\begin{cases} m_A = 1 + \frac{1}{2}m_B + \frac{1}{2}m_C \\ m_B = 1 + \frac{1}{3}m_A + \frac{1}{3}m_C + \frac{1}{3}m_D \\ m_C = 1 + \frac{1}{3}m_A + \frac{1}{3}m_B + \frac{1}{3}m_D \\ m_D = 0 \end{cases}$$

   Ur detta erhålls $m_A = 5$. Eftersom varje steg innebär 1 dm för Ante, så blir svaret 0.5 meter.

6.

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k \\
&= F_0 x^0 + F_1 x^1 + \sum_{k=2}^{\infty} (F_{k-1} + F_{k-2}) x^k \\
&= x + x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k + x^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k \\
&= x + (x + x^2) \cdot A(x) \\
\Leftrightarrow & \\
A(x) &= \frac{x}{1 - x - x^2}
\end{aligned}
$$

7. a) Låt X vara antal stoppade spam-mail. Då är $\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{931}{950} = 0.98$.
   b) Ett enkelsidigt approximativt KI för p av grad $1 - \alpha$ ges av $\left[\hat{p} - z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, 1\right]$.
   Här är $n = 950$ och $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$, vilket medför 95% KI $[0.9725, 1]$.
   c) Approximationerna som använts är normalapproximation av binomialfördelningen (m.h.a. CGS), och approximationen $p(1-p) \approx \hat{p}(1-\hat{p})$.
   d) Eftersom 97.15% ligger under KI kan Mats med 95% konfidens hävda att det nya filtret är bättre.

8. a) ELR: $\mu_{Y_i} = \beta_0 + \beta_1 x_i$. Minsta kvadrat-skattningar av β_0 och β_1 är

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\
b_0 &= \overline{y} - b_1 \overline{x}
\end{aligned}
$$

   Från data erhålls $\sum x_i = 52.7$, $\sum y_i = 27400$, $\sum x_i y_i = 404040$ och $\sum x_i^2 = 679.09$. Insättning ger $b_1 = 932.2$. Vidare har vi $\overline{x} = 10.54$ och $\overline{y} = 5480$, vilket ger $b_0 = -4344.9$.
   Vi får alltså $\hat{\mu}_Y = -4345 + 932x$.
   b) Den skattade årskostnaden för den första bilen blir $-4345 + 932 \cdot 15 = 9635$ kronor. För den andra bilen kan vi inte använda vår modell eftersom 38000 mil ligger långt utanför räckvidden för våra data.

9. a) Se Grinstead & Snell sats 8.1.
   b) Se Grinstead & Snell sats 8.2 med bevis.