Kortfattade lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik (MVE050/MSG810), Statistik för fysiker (MSG820).
Den 17 december 2011.

1. $P(\text{“Minst en GU”}) = 1 - P(\text{“Enbart Chalmers”}) = 1 - \frac{28}{42}\frac{27}{41}\frac{26}{40} \approx 0.7146$

2. Kvadratens area är X^2, täthetsfunktionen för X är $f_X(x) = 1/2$, $x \in [0,2]$.

   (a) $E\left[X^2\right] = \int_0^2 x^2 \frac{1}{2} dx = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

   (b) $P\left(X^2 < 2\right) = P\left(X < \sqrt{2}\right) = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3. Låt X_i beteckna avståndet mellan bil $i-1$ och bil i framför oss. Eftersom X_i exponentialfördelade är $E[X_i] = 0,1km$ och $\mathrm{Var}(X_i) = 0,1^2$.

   (a) Enligt centrala gränsvärdessatsen är $\sum_{i=1}^{50} X_i$ approximativt normalfördelad med $E[\sum_{i=1}^{50} X_i] = 50 * 0,1km = 5km$ och eftersom avstånden är oberoende är $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{50} X_i) = 0,1^2 * 50$.

   (b) $P\left(5 \leq \sum_{i=1}^{50} X_i \leq 5,2\right) = P\left(\frac{5-5}{0,1\sqrt{50}} \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^{50} X_i\right)-5}{0,1\sqrt{50}} \leq \frac{5,2-5}{0,1\sqrt{50}}\right)$
   $= P\left(Z \leq 0,2828\right) - P\left(Z \leq 0\right) = 0,6110 - 0,5 = 0,1110,$
   där $Z = \frac{\left(\sum_{i=1}^{50} X_i\right)-5}{0,1\sqrt{50}} \sim N(0,1)$.

4. Antalet sätt de kan dela upp penningarna på så att alla får minst 3 vardera ges av koefficienten framför x^{20} i

$$\left(x^3 + x^4 + x^5 + \dots\right)^4 = \left(\frac{x^3}{1-x}\right)^4 = \frac{x^{12}}{(1-x)^4} = x^{12}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^n,$$

   alltså $\binom{8+3}{3} = \binom{11}{3} = 165$.

5. $X_1, \dots, X_{38}$ är ett stickprov av X, askorbinsyrehalten i en potatis. Enligt centrala gränsvärdessatsen är $\overline{X} = \frac{1}{38}\sum_{i=1}^{38} X_i$ approximativt normalfördelad eftersom 38 “stort”. Ett dubbelsidigt 95%igt konfidensintervall för väntevärdet $\mu = E[X]$ ges då av $\overline{X} \pm z_{0.025} S/\sqrt{28}$. Insättning av värden ger konfidensintervallet $12,74 \pm 0,9712$.

6. A, B oberoende om $P(A|B) = P(A)$

   (a) $P\left(B|\, A\right) = 1 > P\left(B\right) = 1/6$. Ej oberoende.

   (b) $P\left(C\right) = P\left(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}\right) = 1/6$,
   $P\left(D\right) = P\left(\{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}\right) = 1/6$,
   $P\left(C \cap D\right) = P\left(\{(3,4)\}\right) = 1/36$,
   $P\left(C|\, D\right) = P\left(C \cap D\right)/P(D) = \frac{1/36}{1/6} = 1/6 = P(C)$. Oberoende.

   (c) $P\left(A|\, B\right) = P\left(A \cap B\right)/P(B) = 1/6$,
   $P\left(C|\, D\right) = P\left(C \cap D\right)/P(D) = 1/6$

7. Eftersom tidsmellanrummen är $Exp(\lambda = 0,5)$-fördelade kan storkarnas ankomster ses som händelser i en Poissonprocess med intensitet λ. Låt X beteckna antalet storkar vid $t = 5$. Då är $X \sim \mathrm{Poi}(t\lambda) \sim \mathrm{Poi}(2,5)$ och $P\left(2 \leq X \leq 4\right) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0,2565 + 0,2138 + 0,1336 = 0,6039$.

8. (a) Se boken.

   (b) $P\,(\text{“Fel av typ I”}) = P\,(\,\overline{X} > 0,6\,|H_0) = P\,(\,\frac{\overline{X}-0}{2/\sqrt{25}} > \frac{0,6}{2/\sqrt{25}}\,|H_0) = P\,(Z > 1,5) \approx 0,0668$, där $Z = \frac{\overline{X}}{2/\sqrt{25}} \sim N(0,1)$

   (b) $P\,(\text{“Fel av typ II då } \mu = 0,8\text{”}) = P\,(\,\overline{X} < 0,6\,|\mu = 0,8) =$
   $P\,(\,\frac{\overline{X}-0,8}{2/\sqrt{25}} > \frac{0,6-0,8}{2/\sqrt{25}}\,|H_0) = P\,(Z < -0,020) \approx 0,3989$,
   där $Z = \frac{\overline{X}-0,8}{2/\sqrt{25}} \sim N(0,1)$

9. Problemet kan representeras av en Markovkejda med tillstånden $A = \{$“ingen siffra rätt”$\}$, $B = \{$“3”$\}$, $C = \{$“31”$\}$ $D = \{$“312”$\}$, $E = \{$“3123”$\}$. Det förväntade antalet steg till absorption i tillstånd E om vi startar i tillstånd S, m_S, ges av ekvationssystemet

$$
\begin{aligned}
m_A &= 1 + \frac{9}{10}m_A + \frac{1}{10}m_B \\
m_B &= 1 + \frac{8}{10}m_A + \frac{1}{10}m_B + \frac{1}{10}m_C \\
m_C &= 1 + \frac{8}{10}m_A + \frac{1}{10}m_B + \frac{1}{10}m_D \\
m_D &= 1 + \frac{8}{10}m_A + \frac{1}{10}m_B + \frac{1}{10}m_E \\
m_E &= 0.
\end{aligned}
$$

Lösning av ekvationssystemet ger $m_A = 10000$.