

Petter Mostad
Applied Statistics
Chalmers and GU

MVE051 / MSG810 Matematisk statistik och diskret matematik

Tenta 14 januari 2017, 8:30 - 12:30

Examinator och jour, Petter Mostad, tel. 031-772-3579,
kommer till tentamenslokalen kl. 9:30 och 11:30.

Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd kalkulator och formelsamlingen Beta

(Råde/Westergren: Mathematics Handbook for Science and Engineering)

Totalt antal poäng: 30. Åtminstone 12 poäng krävs för att få godkänd.

Märk: Alla svar skall motiveras.

1. (1 poäng) Vad är sannolikheten för att få utdelad en straight flush i poker; med andra ord: Om 5 kort dras godtyckligt från en standard 52 korts kortlek, vad är sannolikheten för att alla korten är av samma färg och att värdena, eventuellt efter omordning, följer på varann i en sekvens? (Märk: Det är 4 färger med 13 kort i varje färg. Vi räknar att ess kan ha värdet 1 eller värdet 14, men inte samtidigt.)¹
2. (1 poäng) En urn innehåller 6 vita, 8 röda, och 5 svarta bollar. Om man drar 6 bollar i rad godtyckligt från urnan, vad är sannolikheten för att man först drar 2 röda, sen 2 vita, och sen 2 svarta bollar?
3. (3 poäng) Låt $X_1, \dots, X_n$ vara oberoende stokastiska variabler med fördelningsfunktion (cdf) $F_X(x)$. Uttryck fördelningsfunktionerna (cdf) för $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$ och $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$ ut i från $F_X(x)$.
4. (3 poäng) En låda innehåller lika många elektroniska komponenter av två olika typer: A och B. Båda typer har levnadslängd modellerade med exponentialfördelningar², men typ A har förväntad levnadslängd 3 och B har förväntad levnadslängd 5. En komponent plockas från lådan.
 - (a) Skriv ner fördelningsfunktionen (cdf) för levnadslängden till komponenten.
 - (b) Om komponenten fortfarande fungerar efter tiden t , skriv ner sannolikheten att den är av typ B som en funktion av t .
5. (3 poäng) En stokastisk variabel X har en fördelning specificerad genom att $X = 1$ med sannolikhet 0.2, $X = 2$ med sannolikhet 0.4, och $X = 2.5$ med sannolikhet 0.4.
 - (a) Beräkna väntevärdet och variansen av X genom att använda definitionerna.

¹Frågan är något omskrivit i förhållande till den ursprungliga tentan, för att göra den klarare.

²Kom i håg att en stokastisk variabel X med positiva värden har en exponentialfördelning med väntevärde λ om täthetsfunktionen är $f_X(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}$.

- (b) Beräkna den momentgenererande funktionen för X från definitionen av momentgenererande funktioner.
 - (c) Använd den momentgenererande funktionen för att beräkna väntevärdet för X .
6. (3 poäng) Låt X vara en stokastisk variabel med fördelningsfunktion $f(x) = 3x^2$, för $0 \leq x \leq 1$.
- (a) Beräkna väntevärdet och variansen för X .
 - (b) Beräkna väntevärdet för volymen till en sfär med radius X .
7. (4 poäng) Beräkna antalet heltalslösningar av ekvationerna

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21$$

$$0 \leq x_1 < 5$$

$$x_2 > 5$$

$$x_3 \geq 0$$

$$x_4 \geq 0$$

8. (5 poäng) Willy modellerar sammanhangen mellan rökning och återstående levnadslängd för en person med en Markovkädja med tre tillstånd: Rökar inte, rökar, och död. En person är varje år i en av tillstånderna, och vid övergången från ett år till det nästa gäller följande övergångssannolikheter: Sannolikheten för att dö är 0.02 om man inte rökar och 0.03 om man rökar. Om man rökar, så är sannolikheten 0.04 att man nästa år inte rökar (men lever), och om man inte rökar är sannolikheten 0.02 att man nästa år rökar.
- (a) Gör en ritning av den grafiska figuren som motsvarar Markovkädjan.
 - (b) Skriv ner övergångsmatrisen.
 - (c) Markovkädjor är på flera sätt INTE en lämplig modell i denna sammanhangen. Beskriv och förklara varför.
 - (d) Trots olämpligheten, använd modellen för att beräkna förväntad återstående levnadslängd³ för en person som inte rökar, och för en person som rökar.
9. (4 poäng) Ett kasino på nätet säger att ett spel ger vinst 10% av alla gånger det spelas. Martin tror att den riktiga andelen vinster är lägre (han anser det omöjligt att den är högre) och vill göra en undersökning med en hypotestest. Han spelar 94 spel, och av dessa får han vinst i 6 spel.
- Beskriv hypoteserna i hypotestestet, ge formeln för test-statistikan han bör använda, och beräkna värdet av denna. Utför ett hypotestest med ett 95% signifikansnivå. Beräkna även p-värdet för testet.

³I den ursprungliga tentan stod det "levnadsålder" i stället för "återstående levnadslängd"

10. (3 poäng) Billy studerar två populationer, som modelleras av två fördelningar. Fördelningarna har väntevärden respektive μ_A och μ_B , och samma varians σ^2 . Han har observerat värdena 3.1, 5.5, 6.0, och 7.1 i population A och värdena⁴ 6.5, 4.3 och 1.1 i population B.

Vi önskar beräkna konfidensintervall för $\mu_A - \mu_B$.

- (a) Vilken eller vilka andra antaganden behöver vi göra för att komma vidare?
- (b) Beräkna ett 95%-ig och ett 90%-ig konfidensintervall för $\mu_A - \mu_B$.

⁴I den ursprungliga tentan stod det 6,5 i stället för 6.5, så det skulle kunna uppfattas om att det var 4 observationer från population B