

MVE051 / MSG810 Matematisk statistik och diskret matematik

Tenta 12 april 2017, 8:30 - 12:30

Jour: Olle Elias

Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd kalkulator och formelsamlingen Beta
(Råde/Westergren: Mathematics Handbook for Science and Engineering)

Totalt antal poäng: 30. Åtminstone 12 poäng krävs för att få godkänd.

Märk: Alla svar skall motiveras.

1. (2 poäng) Antag A och B är händelser så att $\Pr(A) = 0.8$ och $\Pr(B) = 0.8$.
 - (a) Vad är det minste och det största möjliga värdet av $\Pr(A \cup B)$?
 - (b) Vad är det minste och det största möjliga värdet av $\Pr(A \cap B)$?
2. (3 poäng) Anna arbetar i ett elektroniklab. En viss komponent klarar de med en viss teknik att producera så att 69% av komponenterna blir felfria.
 - (a) Om Anna producerar 6 komponenter, vad är sannolikheten att 4 av dessa blir felfria?
 - (b) Antag Anna i stället jobbar på tills hon har producerat exakt 4 felfria komponenter. Antalet komponenter hon behöver producera är då en stokastisk variabel. Vad kallas denna variabelns fördelning? (Med andra ord, vad är namnet på familjen av fördelningar som denna fördelning tillhör?)
 - (c) Antag Anna producerar 200 komponenter. Beräkna sannolikheten för att 150 eller flera är felfria, genom att använda en approximativ formel.
3. (5 poäng) Antag X är en kontinuerlig stokastisk variabel med värden i intervallet $[0, 2]$ och med täthetsfunktion
$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + c & \text{för } 0 \leq x \leq 1 \\ c & \text{för } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$
där c är någon konstant. (För att svara på frågorna under måste först c beräknas).
 - (a) Vad är sannolikheten att $X > 1$?
 - (b) Vad är väntevärdet till X ?
 - (c) Vad är variansen till X ?
4. (2 poäng) Anastasia undersöker en viss grupp personer, och vill veta proportionen p av dessa som äger en cykel. Av 87 frågade så ägde 51 en cykel.
 - (a) Ge ett estimat för proportionen p och ett 90%-igt konfidensintervall.

- (b) Anastasia's chef tycker att konfidensintervallet är för stort, alltså, att det är för stor osäkerhet i resultaten. Hon vill ha resultat med konfidensintervall med längd bara $1/3$ av längden man fick i a). Hur många nya observationer behöver man göra för att få till ett sådant konfidensintervall?

5. (3 poäng)

- (a) Skriv ner definitionen av den moment-genererande funktionen för en stokastisk variabel X .
- (b) Beräkna den moment-genererande funktionen $m_X(t)$ om X har en Binomialfördelning med parametrar n och p .
- (c) Använd den moment-genererande funktionen för att komma fram till formel för väntevärdet och variansen till en Binomialfördelning med parametrar n och p .

6. (5 poäng)

- (a) Vad menas med att en Markovkädja är stationär?
- (b) En Markovkädja har fyra tillstånd: A, B, C och D. Om man är i tillstånd B så är det 70% chans att stanna där i nästa steg medan det är 10% chans att gå till varje av de andra tillstånden. Om man är i tillstånd C så är det 40% chans att stanna där i nästa steg och 20% chans att gå till varje av de andra tillstånden. Men om man är i A eller D så stannar man där. Kädjan börjar i C. Gör en ritning av den grafiska figuren som motsvarar Markovkädjan.
- (c) Skriv ner övergångsmatrisen.
- (d) Vilka tillstånd är absorberande? Vilka tillstånd är transienta? Är kädjan transient?
- (e) Om man startar i tillstånd C, beräkna förväntad antal steg till absorption.

7. (4 poäng)

- (a) Skriv ner och förenkla den genererande funktionen som motsvarar talföljden $\{a_n\}_0^\infty$ där $a_n = 1$ för $0 \leq n \leq 7$ och $a_n = 0$ för $n > 7$.
- (b) På samma sätt skriv ner den genererande funktionen motsvarande talföljden $\{b_n\}_0^\infty$ där $b_0 = 0$ för $0 \leq n \leq 4$ och $b_n = 1$ för $n > 4$.
- (c) Använd genererande funktioner för att beräkna antalet heltalslösningar av ekvationerna

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$$

$$0 \leq x_1 \leq 7$$

$$x_2 > 4$$

$$x_3 \geq 0$$

$$x_4 \geq 0$$

8. (2 poäng) Alex har observerat styrkan i en speciell fiber i ett antal test, och har fått fram ett stickprov på 16 värden. Dessa har medelvärde 3.24 och stickprovsvarians 0.12. Alex vill göra en hypotestest med en nollhypotes om att väntevärdet för styrkan i dessa fiber är 3.4, medan den alternativa hypotesen är att styrkan är mindre än 3.4. Beräkna ett p-värde för denna hypotestesten. Beskriva även eventuella antaganden du behöver göra.
9. (4 points) Anton studerar sammanhangen mellan två stokastiska variabler x och y . Han har gjort 14 observationer av par av x och y , och från dessa punkter $(x_1, y_1), \dots, (x_{14}, y_{14})$ har han anpassad en rak linja $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ med linjär regression.
- (a) Definera vad som menas med residualerna i denna sammanhangen. Vad är summan av residualerna?
 - (b) Om x och y är oberoende, betyder det att $\hat{\beta}_1$ är noll? Varför / varför inte?
 - (c) Om $\hat{\beta}_1$ är noll, betyder det att x och y är oberoende? Varför / varför inte?
 - (d) En linjär regression kan användas till att göra prediktioner av vad y kommer vara vid nya värden av x ; för dessa prediktioner kan man även beräkna ett konfidensintervall. Kommer storleken av detta konfidensintervall att vara oberoende av x , eller kommer det bero på x , och i så fall, på vilket sätt och varför?