

MVE051/MSG810 2016 Föreläsning 11

Petter Mostad

Chalmers

December 5, 2016

Genererande funktioner

- ▶ Genererande funktioner är ett sätt att studera och räkna med *talföljder* av typ $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.
- ▶ För en talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ så defineras dens *genererande funktion* som (den formella) summan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- ▶ Detta ger ett naturligt sätt att definera t.ex.
 - ▶ summan av två talföljder.
 - ▶ produktet av en talföljd och ett reellt tal.
 - ▶ produktet av två talföljder.
 - ▶ *derivatan* av en talföljd.
- ▶ Dessa och andra operationer kan vara nyttiga när man använder talföljder för att lösa vissa problem (exempler kommer snart).
- ▶ Den smarta idén med genererande funktioner är att ofta motsvarar summan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en reell funktion på något öppet intervall runt $x = 0$, och då kan operationerna över oftast göras lättare på dessa funktioner.

Binomialkoefficienten och Binomialsatsen

- *Binomialsatsen* visas i grundläggande algebra för positiva heltal n :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

där $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ är Binomialkoefficienten.

- Kom i håg att

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} = \prod_{i=1}^k \frac{n-i+1}{i}$$

så Binomialkoefficienten är definierad för alla reella n .

- Binomialsatsen för reella n kan visas att bli

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exempel på genererande funktioner

- ▶ För talföljden $a_k = c^k$ för någon reell c och $k \geq 0$ har vi

$$\sum_{k=0}^{\infty} c^k x^k = \frac{1}{1 - cx}.$$

- ▶ För talföljden $a_k = \binom{n}{k}$ för $k \geq 0$ har vi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = (1 + x)^n$$

- ▶ För talföljden $a_n = \binom{n+k}{k}$ för $n \geq 0$ har vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

Tillämpning 1: Att räkna antalet heltalslösningar

- ▶ Låt q vara antalet lösningar av ekvationen

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n$$

där varje y_i är icke negativa heltal med speciella begränsningar: För varje $i = 1, \dots, k$, låt $\{a_{in}\}_{n=0}^{\infty}$ en talföljd så att $a_{ij} = 1$ om j är tillåtet som värde för y_i i summan över, och annars 0. Då är q lika med koefficienten c_n i den genererande funktionen som är produktet av de genererande funktionerna till talföljderna $\{a_{in}\}_{n=0}^{\infty}$.

- ▶ För att förstå varför: Titta på hur produktet av funktionerna kan konstrueras.
- ▶ Exempel: Du har 7 röda bollar, 5 vita, och 8 svarta. Hur många sätt är det att dra 12 bollar, om du skall ha minst 3 röda?
- ▶ Utanför kursen: Man kan använda satsen över till att visa intressanta identiteter om heltalspartitioner.

Tillämpning 2: Att lösa rekursionsekvationer

- ▶ En talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ kan vara definierad via en rekursiv formel.
- ▶ Alla de rekursiva ekvationerna kan samlas i en ekvation för genererande funktioner.
- ▶ Ofta kan man från denna ekvation lösa ut den genererande funktionen för talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, och detta kan användas till att få en formel för a_n .
- ▶ Utanför kursen: Generaliseringar till systemer av rekursiva ekvationer.

Exponentiella genererande funktioner

- ▶ Ett annat sätt att skapa en formell oändlig sum från en talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ är dens *exponentiella genererande funktion*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

- ▶ Märk till exempel at om talföljden är $a_n = 1$, så blir den exponentiella genererande funktionen e^x .
- ▶ Denna varianten av genererande funktioner kan i en del sammanhang ha speciellt användbara egenskaper.

Tillämpning 3: Att räkna antalet "ord" på viss form

- ▶ Antag vi vill skapa "ord" med n olika symboler, där antalet tillåtna symboler av typ i ges med talföljden $\{a_{in}\}_{n=0}^{\infty}$, med motsvarande exponentiell genererande funktion $g_i(x)$. Då är antalet möjliga ord av längd k lika med koefficienten före $x^k/k!$ i den exponentiella genererande funktionen som motsvarar produktet $g_1(x)g_2(x) \cdots g_n(x)$.
- ▶ Märk: Om vi räknar med vanliga genererande funktioner så fick vi motsvarande resultat för antalet *oordnade* ord. När vi i stället använder exponentiella genererande funktioner får vi med faktorer som motsvarar antalet sätt att ordna symbolerna för varje oordnade ord.
- ▶ Exempel: Hur många DNA-strängar av längd 4 finns det om den bara skall innehålla A och C, och C skall förekomma minst två gånger?

Generellt om genererande funktioner

- ▶ Ett sätt att representera talföljder $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ så att man lättare kan göra beräkningar.
- ▶ Exempel på tillämpning: Om $a_0, a_1, \dots$, är *momenterna* till en stokastisk variabel X så kallas den motsvarande exponentiella genererande funktionen $m_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n / n!$ för den "momentgenererande funktionen".
- ▶ Vi skall då visa (om väntevärdet existerar) att $m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$.
- ▶ Ett annat exempel på genererande funktion: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ kan representeras av den formella summan

$$\psi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(it)^n}{n!}$$

där i är den imaginära enheten $\sqrt{-1}$.

- ▶ När $a_0, a_1, \dots$, är momenterna till en stokastisk variabel X så kallas funktionen över den *karaktéristiska funktionen* till X . Vi får att

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$$

Funktionen har motsvarande egenskaper som $m_X(t)$ men har fördelen att existerar för alla stokastiska variabler X , något $m_X(t)$ inte gör.