MVE051/MSG810 2016 Föreläsning 12

Petter Mostad

Chalmers

January 2, 2017

Momentgenererande funktioner

- Anta X är en stokastisk variabel. Om funktionen

$$m_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$$

  existerar för t i något öppet intervall runt $t = 0$, så kallas $m_X(t)$ för den *momentgenererande funktionen* till X.
- Kom i håg att *momenterna* till X är definerad med (för $n \geq 0$)

$$a_n = \mathbb{E}\left[X^n\right].$$

- Vi får att om den momentgenererande funktionen existerar så är den den *exponentiella genererande funktionen* till talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.
- Beviset använder Maclaurin serien:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

- $m_X(t)$ har många användningar, t.ex. att beräkna väntevärde och varians till en fördelning.

Beräkna väntevärde och varians med $m_X(t)$

- Om $m(t)$ är expoentiell genererande funktion till $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ så är $m'(t)$ exponentiell genererande funktion till $\{a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$.
- Om $m(t)$ är expoentiell genererande funktion till $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ gäller

$$m(0) = a_0 \quad m'(0) = a_1 \quad m''(0) = a_2 \quad m'''(0) = a_3 \quad \dots$$

- Om $m_X(t)$ är den momentgenererande funktionen till X så är $m_X'(0) = \mathbb{E}[X]$, $m_X''(0) = \mathbb{E}\left[X^2\right]$, $m_X'''(0) = \mathbb{E}\left[X^3\right]$, etc.
- Till exempel blir $\text{Var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = m_X''(0) - m_X'(0)^2$.

Exempel: $m_X(t)$ för Binomialfördelningen

- När $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, så att frekvensfunktionen är
$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$
så får vi
$$m_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n$$
- Bevis
- Från detta får vi att $m_X'(0) = np$ och $m_X''(0) = np + n(n-1)p$, som ger $\text{Var}[X] = np - np^2$.

Exempel: $m_X(t)$ för Poissonfördelningen

- När $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ så att frekvensfunktionen är
$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$
så får vi
$$m_X(t) = \exp(e^t\lambda - \lambda)$$
- Bevis
- Från detta får vi att $m_X'(0) = \lambda$ och $m_X''(0) = \lambda^2 - \lambda$, som ger $\text{Var}[X] = \lambda$.

Exempel: $m_X(t)$ för Gammafördelningen

- När $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ så att täthetsfunktionen är

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta)$$

så får vi

$$m_X(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$$

- Bevis
- Från detta får vi att $m'_X(0) = \alpha\beta$ och $m''_X(0) = \alpha\beta^2(1+\alpha)$, som ger $\text{Var}[X] = \alpha\beta^2$.

Exempel: $m_X(t)$ för Normalfördelningen

- När X har standard normalfördelning så att täthetsfunktionen är

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2)$$

  så får vi

$$m_X(t) = \exp(t^2/2)$$

- Med lite extra arbete får vi när $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma)$ att

$$m_X(t) = \exp(\mu t + \sigma^2 t^2/2)$$

- Från detta får vi att $\mathbb{E}[X] = \mu$ och $\text{Var}[X] = \sigma^2$. Vi kan även ganska lätt beräkna högre moment $\mathbb{E}\left[X^3\right]$, $\mathbb{E}\left[X^4\right]$, etc.

Flera momentgenererande funktioner

- Om X har en Geometrisk fördelning med parameter p så får vi

$$m_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

- Om X har en Negativ Binomialfördelning med parametrar r och p så får vi

$$m_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$$

- $m_X(t)$ för en del fördelningar finns i "Beta" formelsamlingen. (Tentan kommer innehålla nödvändig information för de som inte har med denne formelsamlingen).

Nyttiga egenskaper för momentgenererande funktioner

- Om $m_X(t) = m_Y(t)$ för stokatstiska variabler X och Y för alla t i något öppet intervall runt 0 så är $X = Y$. ($m_X(t)$ är ett "fingeravtryck")
- Om α och β är reella tal har vi $m_{\alpha+\beta X}(t) = e^{\alpha t} m_X(\beta t)$.
- Exempel på användning: Bevis för att om $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma)$, så är $(X - \mu)/\sigma \sim \text{Normal}(0, 1)$.
- För oberoende X och Y har vi $m_{X+Y}(t) = m_X(t) m_Y(t)$.
- Exempler på användning:
  - Summan av oberoende normalfördelade variabler är normalfördelad.
  - Summan av oberoende Poissonfördelade variabler är Poissonfördelad.
  - Summan av oberoende Gammafördelade variabler med samma β är Gammafördelad.

Chebychev's olikhet

- Antag X är en stokastisk variabel med väntevärde μ och standardavvikelse σ. Då har vi för varje positiva tal k att

$$\Pr\left[|X-\mu| < k\sigma\right] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

- Bevis
- I tillämpade situationer kan man ta fram begränsningar i sannolikheten för att X är alltför långt borta från μ. Fast begränsningarna är oftast inte så nyttiga i praktiken.
- Chebychev's olikhet har kanske större värde som verktyg inom sannolikhetsteorin.

Stora talens lag

- Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara ett stickprov från en fördelning med väntevärde μ och varians σ^2 För godtycklig positiv k har vi att

$$\Pr\left[|\overline{X} - \mu| < k\right] \to 1$$

  när $n \to \infty$.
- Beviset stöder sig på Chebychev's olikhet.
- Bekräftar matematisk en intuition om hur sannolikhet fungerar.
- Märk: Gäller inte om variansen inte finns!