

MVE051/MSG810 2016 Föreläsning 2

Petter Mostad

Chalmers

November 13, 2016

Diskreta och kontinuerliga stokastiska variabler

- ▶ Tills nu har vi pratat om generella utfallsrum, och sannolikhetsfördelningar på dessa. Men oftast har vi en funktion f från utfallsrummet till reella tal, och vi är intresserade av de resulterande sannolikheterna för delmängder av dessa tal. Vi har då en *stokastisk variabel*.
- ▶ Lite förenklad kan vi tänka oss att utfallsrummet är (en delmängd av) de reella talen.
- ▶ Exempler:
 - ▶ En ändlig delmängd av de reella talen, t.ex., $0, 1, 2, \dots, n$, är funktionsvärden av f . Detta är en *diskret stokastisk variabel*.
 - ▶ En uppräkningsbar delmängd av de reella talen, t.ex., $0, 1, 2, \dots$ är funktionsvärden av f . Även detta är en *diskret stokastisk variabel*.
 - ▶ Ett intervall, eller alla reella tal, är funktionsvärden av f . Vi har en *kontinuerlig stokastisk variabel*.
- ▶ Vi skriver ofta versal X för en stokastisk variabel, och gemen x för ett möjligt värde av X .
- ▶ I dag: Diskreta stokastiska variabler. Nästa gång: Kontinuerliga.

Diskreta stokastiska variabler

Låt X vara en diskret stokastisk variabel.

- ▶ Funktionen

$$f(x) = \Pr[X = x]$$

kallas *frekvensfunktionen* till X .

- ▶ En funktion f är en frekvensfunktion om och endast om $f(x) \geq 0$ för alla x och $\sum_{\text{alla } x \text{ med } f(x) > 0} f(x) = 1$.
- ▶ Funktionen

$$F(x) = \Pr[X \leq x]$$

kallas *fördelningsfunktionen* till X .

- ▶ Om X är en stokastisk variabel, så får vi även definierad stokastiska variabler som $X + 1$, X^2 , $\log(X) + X$, etc.

Exempel, med geometriska serier

- ▶ Kom i håg Geometriska serier. För $|s| < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} s^k = \frac{1}{1-s}$
- ▶ Från detta följer också att $\sum_{k=0}^n s^k = \frac{1-s^{n+1}}{1-s}$
- ▶ Definera en funktion f med

$$f(x) = \begin{cases} (1-s)s^x & \text{om } x = 0, 1, \dots, \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Vi kan visa att $\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$ så detta är en frekvensfunktion.

- ▶ Fördelningsfunktionen blir, för $x = 0, 1, \dots$,

$$F(x) = \sum_{k=0}^x (1-s)s^k = (1-s) \sum_{k=0}^x s^k = (1-s) \frac{1-s^{x+1}}{1-s} = 1 - s^{x+1}$$

Väntevärde, varians och standardavvikelse

- ▶ För en stokastisk variabel X så kan man definera dens *väntevärde*, *varians*, och *standardavvikelse*.
- ▶ Det är viktigt att skilja dessa begrepp från det *medelvärde* och den *varians* och *standardavvikelse* som kan beräknas från data $x_1, x_2, \dots, x_n$!
- ▶ Sammanhangen, som vi kommer till senare, är att man beräknar
 - ▶ medelvärde av data för att estimera väntevärdet av variabeln X
 - ▶ varians av data för att esitmera variansen till variabeln X
 - ▶ standardavvikelsen av data för att estimera standardavvikelsen till variabeln X

Väntevärdet av en diskret stokastisk variabel

- ▶ Intuitivt: Väntevärdet av X är det värde som medelvärdet av ett antal observationer av X närmar sig, när antalet observationer stiger.
- ▶ För en diskret stokastisk variabel X med frekvensfunktion $f(x)$ kan vi definiera

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\text{alla } x} xf(x)$$

(om $\sum_{\text{alla } x} |x|f(x) < \infty$).

- ▶ Mera generellt, om H är en funktion så kan vi definiera

$$\mathbb{E}[H(X)] = \sum_{\text{alla } x} H(x)f(x)$$

(om $\sum_{\text{alla } x} |H(x)|f(x) < \infty$).

Några räkneregler för väntevärdet

- ▶ För en konstant c har vi

$$\mathbb{E}[c] = c$$

- ▶ För en konstant c har vi

$$\mathbb{E}[cX] = c \mathbb{E}[X]$$

- ▶ Om $Y = f(X)$ och $Z = g(X)$ är givna som funktioner av X så har vi

$$\mathbb{E}[Y + Z] = \mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Z]$$

- ▶ Man använder ofta μ för att beteckna väntevärdet.

Varians och standardavvikelse av en diskret stokastisk variabel

- ▶ Variansen av en stokastisk variabel defineras som

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

- ▶ Genom att använda räknereglerna får vi även att

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

- ▶ Standardavvikelsen av en stokastisk variabel defineras som

$$\text{Sd}[X] = \sqrt{\text{Var}[X]}$$

- ▶ Man använder ofta σ^2 och σ för att beteckna variansen respektive standardavvikelsen till X .

Några räkneregler för varians och standardavvikelse

- ▶ För en konstant c har vi

$$\text{Var}[c] = 0$$

- ▶ För en konstant c har vi

$$\text{Var}[cX] = c^2 \text{Var}[X]$$

- ▶ För en konstant c har vi

$$\text{Sd}[cX] = c \text{Sd}[X]$$

- ▶ På grund av den senare egenskapen är standardavvikelsen lättare att tolka än variansen.

- ▶ Två möjliga värden, 0 och 1, och frekvensfunktion

$$f(x) = \begin{cases} p & \text{om } x = 1 \\ 1 - p & \text{om } x = 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

- ▶ Väntevärdet är p . (Beräkna!)
- ▶ Variansen är $p - p^2 = p(1 - p)$. (Beräkna!)
- ▶ Exempel: Ett enskild "försök" med sannolikhet p att "lyckas".

Den Geometrisk fördelningen

- ▶ Möjliga värden $1, 2, 3, \dots$. Frekvensfunktion

$$f(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & \text{om } x = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Kontrollera att detta är en frekvensfunktion!

- ▶ Väntevärdet är $1/p$. (Beräkna!)
- ▶ Variansen är $(1-p)/p^2$. (Beräkna!)
- ▶ Exempel: I en sekvens av oberoende "försök" som varje har sannolikhet p att "lyckas", vad är antalet försök till och med det första lyckade försöket?

- ▶ Möjliga värden $0, 1, 2, \dots, n$. Frekvensfunktion

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{om } x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Kontrollera att detta är en frekvensfunktion!

- ▶ Väntevärdet är np . (Beräkna!)
- ▶ Variansen är $np(1-p)$. (Beräkna!)
- ▶ Exempel: I en sekvens av n oberoende "försök" som varje har sannolikhet p att "lyckas", vad är antalet försök som lyckas?

Den moment-genererande funktionen

- ▶ *Momenten* till en stokastisk variabel X är värdena $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$, $\mathbb{E}[X^3]$, $\mathbb{E}[X^4]$,
- ▶ Som vi såg så är väntevärdet och variansen funktioner av de två första momenten.
- ▶ Som vi såg, så är det inte alltid enkelt att beräkna väntevärde och varians (och generellt, momenten) till X . En alternativ metod är att använda *den moment-genererande funktionen*.

- ▶ Definitionen är

$$m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

och moment k kan beräknas genom att derivera denna funktionen k gånger och sätta $t = 0$.

- ▶ Moment-genererande funktioner är ett specialfall av *genererande funktioner* som är viktiga i kombinatoriken. Vi kommer arbeta med dessa senare, och väntar därför också med att arbeta med moment-genererande funktioner.