MVE051/MSG810 2016 Föreläsning 5

Petter Mostad

Chalmers

November 16, 2016

Markovkädjor

- En Markovkädja är en simultan fördelning för stokastiska variabler $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ där frekvensfunktionerna uppfyller

$$f_{X_k | x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}}(x) = f_{X_k | x_{k-1}}(x)$$

för alla $k = 2, 3, \ldots$.

- I många samanhang används $Y \mid X$ för att beteckna den stokastiksa variabeln Y betingad på X. Därmed kan villkåret över skrivas

$$X_k \mid X_1, X_2, \ldots, X_{k-1} \sim X_k \mid X_{k-1}$$

där "$\sim$" anger att variablerna har samma fördelning.

- Så en Markovkädja en sekvens av beroende stokastiska variabler så att varje variabel X_k givet alla föregående egentligen bara beror på den ena föregående variabeln X_{k-1}.
- I vår kurs kommer alla X_k ha ändliga tillståndsrum, så X_k är en diskret stokastisk variabel, och alla X_k har samma tillståndsrum S.
- Vi kommer också anta att alla betingade fördelningar $X_k \mid X_{k-1}$ är lika, oberoende av k (man brukar säga att Markovkädjan är stationär).

En graf kan visualisera Markovkädjan (när S har få element)

- Grafen innehåller en nod för varje element i S.
- Vi kommer oftast anta de möjliga värdena i S är $1, 2, 3, \ldots, n$, eller $0, 1, 2, \ldots, n-1$.
- För varje par i, j så att $\Pr\left[X_k = j \mid X_{k-1} = i\right] = p_{ij} > 0$ har vi en pil från noden som representerar i till noden som representerar j. Vi kan skriva värdet av p_{ij} brevid pilen.
- För att specificera Markovkädjan behöver vi i tillägg specificera fördelningen för den första variabeln X_1 i kädjan. Om denna fördelningen är att X_1 med sannolikhet 1 är lika med något element i S, så markeras den motsvarande noden som "startnoden".

Övergångsmatrisen

- Den betingade fördelningen till $X_k \mid X_{k-1}$ specificeras genom alla sannolikheterna $\Pr[X_k = j \mid X_{k-1} = i] = p_{ij}$. Dessa kan vi samla i *övergångsmatrisen* P:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

- För övergångsmatrisen gäller
  - Alla $p_{ij} \geq 0$.
  - $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$, så alla rader summerar sig till 1. Detta kan skrivas med matrixmultiplikation som $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$ där $\mathbf{1}$ är matrisen med en kolumn med n ettor.
  - Att ändra indexeringen av elementer i S motsvarar att byta om på motsvarande kolumner, och samtidigt motsvarande rader.
- Om vektorn $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ är sannolikheterna vid steg k så är vektorn vP sannolikheterna vid steg $k + 1$.

Beräkning av $p_{ij}^{(s)}$, sannolikheten att gå från i till j i s steg

- Om vektorn med sannolikheter för X_k är v så är vektorn med sannolikheter för X_{k+1} lika med vP. Därmed är vektorn med sannolikheter för X_{k+2} lika med $vPP = vP^2$.
- Generellt får vi att sannolikheterna för X_{k+s} blir vP^s.
- Därmed: Sannolikheten att gå frå tillstånd i till tillstånd j i s steg är givet som (i, j)-elementen i matrisen P^s, och skrivs $p_{ij}^{(s)}$.

Några typer Markovkädjor

- En Markovkädja är *Ergodisk (irreducibel)* om det för alla i, j existerar en n så att $p_{ij}^{(n)} > 0$. Med andra ord: Det är alltid möjligt att gå från i till j, möjligtvis via andra tillstånd.
- En Markovkädja är *reguljär* om det existerar en n så att $p_{ij}^{(n)} > 0$ för alla i, j.
- Ett tillstånd i är *absorberande* om $p_{ii} = 1$. Med andra ord: Det är omöjligt att lämna i om man först kommit dit.
- Ett tillstånd som inte är absorberande kallas *transient*.
- En Markovkädja är *absorberande* om det för alla i finns ett absorberande tillstånd j och en n så att $p_{ij}^{(n)} > 0$. Med andra ord: Det är alltid möjligt att nå fram till ett absorberande tillstånd, möjligtvis via andra tillstånd.

Kanonisk form

- Övergångsmatrisen för en *absorberande* Markovkädja kan vi skriva på formen
$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix}$$
där vi re-nummererat tillstånden så att de absorberande tillstånden har högst index. I är identitetsmatrisen och 0 är matrisen med bara nollor. Denna formen kallas *kanonisk form*.
- Matrisalgebra ger oss då att
$$P^n = \begin{bmatrix} Q^n & (Q^{n-1} + Q^{n-2} + \cdots + Q + I)R \\ 0 & I \end{bmatrix}$$
- Sannolikheten för att en absorberande Markovkädja änder i ett absorberande tillstånd är 1. (Visa!) Så $Q^n \to 0$ när $n \to \infty$.

Beräkning av n_{ij}: Väntevärdet för antalet gångar en kädja som startar med i är i det transienta tillståndet j

- Vi samlar alla n_{ij} i matrisen N; detta kallas den *fundamentala* matrisen.
- Vi får $n_{ij} = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} I_{ijk}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[I_{ijk}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ij}^{(k)}$, där I_{ijk} är indikatorn att processen som startat i i är i tillstånd j efter k steg.
- Därmed får vi

$$N = I + Q + Q^2 + \cdots + Q^k + \dots$$

- Sedan $(I + Q + Q^2 + \cdots + Q^k)(I - Q) = I - Q^{k+1}$ och $Q^{k+1} \to 0$ när $k \to \infty$ får vi

$$N(I - Q) = I$$

  och därmed $N = (I - Q)^{-1}$.

Väntevärdet för antalet steg till absorbsjon

- Det totala antalet steg till absorbsjon är lika med summan av antalet gångar som kädjan är i olika transienta tillstånd innan absorbsjonen.
- Därmed får vi att väntevärdet för antalet steg till absorbsjonen när vi startar i tillstånd i är summan av värdena i rad i i fundamentala matrisen N.
- Vi kan skriva dessa summor i matrisnotation som $N\mathbf{1}$.

Villket tillstånd absorberas man i?

- Vi har visat att
$$P^n = \begin{bmatrix} Q^n & (Q^{n-1} + Q^{n-2} + \cdots + Q + I)R \\ 0 & I \end{bmatrix}$$
- När $n \to \infty$ så får vi $Q^n \to 0$ och $Q^{n-1} + Q^{n-2} + \cdots + Q + I \to N$, och därmed
$$P^n \to \begin{bmatrix} 0 & NR \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ när } n \to \infty$$
- Så om man startar med det transienta tillståndet i så änder man i det absorberande tillståndet j med sannolikhet q_{ij}, där q_{ij} är element i, j från matrisen NR.