

MVE051/MSG810 2016 Föreläsning 6

Petter Mostad

Chalmers

November 23, 2016

Några flera familjer av fördelningar

- ▶ Vi har än så länge hört om den Geometrisk fördelningen, Binomialfördelningen, och Normalfördelningen.
- ▶ Detta är exemplar på *familjer av fördelningar*: För varje värde av *parametrarna* i familjen så får man en specifik fördelning.
- ▶ Nu skall vi titta på ett antal andra familjer: Poissonfördelningen, den hypergeometrisk fördelningen, negativ Binomialfördelning, Gammafördelningen, Chi-kvadrat fördelningen, och exponentialfördelningen. Varje familj har egenskaper som gör den till en lämplig *modell* för vissa fenomen i verkligheten med motsvarande egenskaper.
- ▶ Slutligen nämner vi ett exempel på en stokastisk process: Poissonprocessen.

Poissonfördelningen

- ▶ En diskret variabel X med möjliga värden $0, 1, 2, \dots$ har en Poissonfördelning med *intensitet* λ om frekvensfunktionen är

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}.$$

- ▶ Används ofta för att modellera antalet oberoende händelser inom någon tidsram eller dylikt.
- ▶ En Binomialfördelning med parametrar n och p närmar sig en Poissonfördelning med parameter λ om $n \rightarrow \infty$ medan $np = \lambda$.
- ▶ Väntevärdet är λ och variansen är λ .
- ▶ Om $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ och $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ så blir

$$X_1 + X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

- ▶ Exempel: Om antalet inkommande telefonsamtal är Poissonfördelat med väntevärde 3 per minut, så är antalet samtal per timme Poissonfördelat med väntevärde $3 \cdot 60 = 180$.

Den negativa Binomialfördelningen

- ▶ En diskret stokastisk variabel X har en negativ Binomialfördelning med parametrar p och r om den har frekvensfunktion

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r} p^r$$

Märk att de möjliga värdena till x är $r, r+1, r+2, \dots$.

- ▶ Motsvarar en sekvens av oberoende försök där varje försök har sannolikhet p för att lyckas, där antalet lyckade försök är fixerad till r , och där x är antalet försök man behöver göra för att uppnå r lyckade försök.
- ▶ Om $X \sim \text{Neg-Binomial}(p, r)$ så har vi
 - ▶ $\mathbb{E}[X] = \frac{r}{p}$.
 - ▶ $\text{Var}[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

Hypergeometrisk fördelning

- ▶ En diskret stokastisk variabel X har en Hypergeometrisk fördelning med parametrar N , n och r om frekvensfunktionen är

$$f(x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Märk att de möjliga värdena är alla heltalsvärden från och med $\max(0, n - (N - r))$ till och med $\min(n, r)$.

- ▶ Motsvarar följande situation: Du har en urna med N bollar totalt, där r är svarta och $N - r$ är vita. Om du drar n bollar från urnan, vad är sannolikheten att du får exakt x svarta?
- ▶ Om $X \sim \text{Hypergeometrisk}(N, n, r)$ så har vi
 - ▶ $\mathbb{E}[X] = n \cdot \frac{r}{N}$
 - ▶ $\text{Var}[X] = n \cdot \frac{r}{N} \cdot \frac{N-r}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$

- ▶ För $\alpha > 0$ defineras $\Gamma(\alpha)$ med

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} z^{\alpha-1} e^{-z} dz$$

- ▶ Viktiga egenskaper:
 - ▶ $\Gamma(1) = 1$
 - ▶ För $\alpha > 0$ kan man visa att $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
 - ▶ Därmed får vi, för positiva heltal, $n! = \Gamma(n + 1)$.
- ▶ Man får t.ex. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Funktionen kan utvidgas till en analytisk funktion av en komplex variabel z .

Gammafördelningen

- ▶ Enligt Milton: En kontinuerlig stokastisk variabel X med de positiva reella talen som möjliga värden har en Gammafördelning med parametrar $\alpha > 0$ och $\beta > 0$, vi skriver $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, om täthetsfunktionen är

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta).$$

- ▶ MÄRK: Många ställen används i stället en definition där β ersätts med $1/\beta$, så att täthetsfunktionen blir

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-x\beta)$$

Kolla vilken definition som används om du tex. använder programmer för simulering av eller beräkning för Gammafördelade variabler!

- ▶ Om $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ så har vi
 - ▶ $\mathbb{E}[X] = \alpha\beta$
 - ▶ $\text{Var}[X] = \alpha\beta^2$

Chi-kvadrat fördelningen

- ▶ En variabel X har en Chi-kvadrat fördelning med γ frihetsgrader, vi skriver $X \sim \chi^2(\gamma)$, om X har en Gammafördelning med parametrar $\gamma/2$ och 2:

$$\chi^2(\gamma) = \text{Gamma}(\gamma/2, 2)$$

- ▶ Vi får därmed, om $X \sim \chi^2(\gamma)$,
 - ▶ $\mathbb{E}[X] = \gamma$.
 - ▶ $\text{Var}[X] = 2\gamma$.
- ▶ En viktig egenskap: Om $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ är oberoende variabler med standard normalfördelning, så är

$$Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_k^2 \sim \chi^2(k)$$

- ▶ Givet γ och vissa F med $0 < F < 1$ så finns det i Milton Appendix A Table IV en tabell med värden t så att

$$\Pr[X \leq t] = F$$

om $X \sim \chi^2(\gamma)$.

Exponentialfördelningen

- ▶ En stokastisk variabel X med positiva reella tal som möjliga värden har en exponentialfördelning med parameter β , $X \sim \text{Exponential}(\beta)$, om täthetsfunktionen är

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}$$

- ▶ MÄRK: Många använder i stället $\lambda = 1/\beta$ som parameter!
- ▶ Vi får direkt att om $X \sim \text{Exponential}(\beta)$, så blir
 - ▶ $\mathbb{E}[X] = \beta$
 - ▶ $\text{Var}[X] = \beta^2$.
 - ▶ $F_X(x) = 1 - e^{-x/\beta}$ för fördelningsfunktionen F_X .
- ▶ Vi kan också använda att exponentialfördelningen är ett specialfall av Gammafördelningen:

$$\text{Exponential}(\beta) = \text{Gamma}(1, \beta)$$

Exponentialfördelningen

- ▶ "Har inget minne": Om $X \sim \text{Exponential}(\beta)$, så är

$$\Pr[X > s + t] = \Pr[X > s] \Pr[X > t]$$

och med andra ord

$$\Pr[X > s + t \mid X > s] = \Pr[X > t]$$

- ▶ Exponentialfördelningen är därmed nyttig för att modellera tiden mellan händelser om är oberoende av varann.
- ▶ Antag att man har händelser i anknytning till tidpunkter $T_1, T_2, T_3, \dots$ och att händelsernas tidpunkter är oberoende av varann och har konstant intensitet. Antag medelvärdet för antalet händelser inom en tidsenhet är λ . Då är medelvärdet för tidslängden mellan händelserna (mätt i denna tidsenheten) $1/\lambda$, och
 - ▶ Antalet händelser inom tidsenheten är Poissonfördelad med parameter λ .
 - ▶ Tidsintervallet mellan händelser är Exponentialfördelad med parameter $1/\lambda$.

- ▶ Exempel på en *stokastisk process*.
- ▶ En Poissonprocess består av $\{N_t\}$ för alla reella $t \geq 0$ så att
 - ▶ För varje t så är N_t en diskret stokastisk variabel med $N_t \in \{0, 1, 2, \dots\}$.
 - ▶ $N_0 = 0$
 - ▶ $N_{t+s} \geq N_t$ för alla positiva t, s .
 - ▶ $N_t - N_s$ är oberoende av $N_v - N_u$ om $u < v < s < t$
 - ▶ $N_{t+s} - N_t$ med $s > 0$ är oberoende av t .
 - ▶ $\Pr[N_s > 1]/s \rightarrow 0$ när $s \rightarrow 0$.
- ▶ Poissonprocessen uppfyller
 - ▶ $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ där λ är intensiteten till processen.
 - ▶ $N_{t+s} - N_t \sim \text{Poisson}(\lambda s)$.
 - ▶ Om $T_1, T_2, T_3, \dots$ är de t där N_t ändrar värde, så är för alla i

$$T_{i+1} - T_i \sim \text{Exponential}(1/\lambda)$$