

## Simulering av bivariat normalfördelning

Låt  $X, Y$  vara två oberoende  $N(0, 1)$ -variabler. Tätheten för paret  $X, Y$  är

$$\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} \quad (1)$$

Täthet för en standardiserad normalvariabel  $Z$  är ju som bekant

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad \text{för} \quad -\infty < z < \infty$$

Tätheten (1) är konstant på cirklar i  $(x, y)$ -planet med centrum i origo. Härur följer att vektorn  $(X, Y)$ :s vinkel mot  $x$ -axeln,

$$\phi = \arctan \frac{Y}{X}$$

är  $U[0, 2\pi)$ . Man kan vidare visa att avståndet till origo,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

är fördelad enl tätheten

$$f(r) = r e^{-r^2/2} \quad \text{för} \quad r \geq 0$$

samt att  $R$  och  $\phi$  är oberoende ( $f(r)$  kallas ibland för Rayleigh-tätheten och  $R$  säges då vara Rayleigh-fördelad). Detta visades av Box och Muller i [1].

Box och Muller anvisade i [1] dessutom en metod för att simulera normalvariabler, som utgår ifrån på att om  $R$  och  $\phi$  är fördelade som ovan (alltså Rayleigh resp  $U[0, 2\pi)$ ) och oberoende, så är de två variablerna

$$\begin{aligned} Z_1 &= R \cos \phi \\ Z_2 &= R \sin \phi \end{aligned}$$

oberoende och  $N(0, 1)$ . Metoden kallas ofta för Box-Mullers metod.

## Referenser

- [1] G. E. P. Box and Mervin E. Muller, A note on the generation of normal random deviates, *Ann. Math. Stat.*, Vol **29** (1958), pp 610–611.

## Uppgift att utföra och besvara

Skriv ett Matlab-program som simulerar en observation  $z_1, z_2$  av två oberoende standardiserade normalvariabler  $Z_1, Z_2$  enl Box-Mullers metod. (Uppgiften består alltså i att utifrån ett slumpstal  $u_1$  simulera en observation  $r$  av  $R$ , och utifrån ett annat slumpstal  $u_2$  simulera en observation  $\phi$  av  $U[0, 2\pi)$  och därefter bilda  $z_1 = r \cos \phi$  och  $z_2 = r \sin \phi$ . I Matlab genereras slumpstal med instruktionen `rand`.) Därefter ska paret  $z_1, z_2$  omvandlas till en observation  $x, y$  av en bivariat normalfördelning enl

$$\begin{aligned}x &= \mu_1 + \sigma_1 z_1 \\y &= \mu_2 + \sigma_2 \left( \rho z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} z_2 \right)\end{aligned}$$

Denna transformation ska ingå i programmet, som lämpligen skrivs som en funktion med indata parametererna  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$  och utdata  $x, y$ .

Reflektera gärna själv över hur  $x$  och  $y$  hänger ihop för olika värden på  $-1 < \rho < 1$ . Välj t.ex  $\rho = 0$  och  $\rho$  nära  $-1$  resp  $1$ .

Till sist: skriv koden kompakt och ekonomisk m.a.p exekveringstid.

## Angående inlämning 2

Matlab-koden ska skickas i ett e-mejl till adressen `tommy@chalmers.se` med rubriken ("subject") `Z3-Inl 2 ht 2008-prm`, där du byter ut `prm` mot ditt värde på variabeln. I e-brevet ska finnas personliga uppgifter samt koden enl följande mall:

Namn: Doe John  
Personnummer: 8612327689  
e-mejl:

`% Kod 2 start`

`% Kod 2 slut`

Efternamnet ska skrivas först. Personnummret ska bestå av 10 siffror utan mellanrum. Glöm inte att ange din e-postadress. Annars får du inte reda på om du är godkänd eller har fått retur. Mellan raderna `% Kod 2 start` och `% Kod 2 slut` lägger du din Matlab-kod.