Tentamensskrivning för kursen SANNOLIKHETSTEORINS GRUNDER
torsdagen den 24 april 2003 kl. 08.45-13.45 i M-huset.
Lärare: Torgny Lindvall. Telefon ankn. 3574 eller hem 242118.
Hjälpmedel: Inga.
****
Fullt nöjaktigt löst uppgift ger 5 poäng.

Händelser och stokastiska variabler nedan antas definierade på ett sannolikhetsrum som vi kallar $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1. De två ickenegativa stokastiska variablerna X och Y har båda ändligt väntevärde. Om de är oberoende så gäller förstås detsamma för $X \cdot Y$. Visa med ett exempel att om oberoendeantagandet slopas så behöver $X \cdot Y$ inte ha ändligt väntevärde.

2. Ge exempel på en sekvens av stokastiska variabler som var och en antar ändligt många värden, och som konvergerar i fördelning mot den likformiga fördelningen på $[0, 1]$.

3. De stokastiska variablerna $X_n, n = 1, 2, \ldots,$ är Geo$(a/n)-$ fördelade, d.v.s. $\mathbf{P}(X_n = k) = (1 - a/n)^{k-1} \cdot (a/n)$ för $k = 1, 2, \ldots$; här är a en konstant $\in (0, 1)$. Visa att X_n/n konvergerar i fördelning mot en exponentialfördelning då $n \to \infty$.

4. Låt $U_1, U_2, \ldots,$ vara oberoende och likformigt fördelade på $[0, 1]$, och låt $I_1, I_2, \ldots$ vara intervall $\subset [0, 1]$. Visa att $\mathbf{P}(U_n \in I_n \text{ o.o.}) = 1$ om och endast om $\sum_1^\infty l(I_n) = \infty$, där $l(I)$ betecknar längden på ett intervall I.

5. Ge exempel på en sekvens av stokastiska variabler som konvergerar i sannolikhet men inte nästan säkert.

6. Den stokastiska variabeln X har karaktäristisk funktion ϕ. Visa att om $\phi(t)$ antar endast reella värden (för reella t naturligtvis), så är X symmetriskt fördelad (d.v.s.: X och $-X$ har samma fördelning).

FÖR KORTFATTADE LÖSNINGAR, V.G. VÄND!

Kortfattade lösningar till SANNOLIKHETSTEORINS GRUNDER den 24/4 2003.
Lärare: Torgny Lindvall.

---

1. Låt X ha täthet $C \cdot x^{-5/2}$ för $x \geq 1$, där C är en normerande konstant. Vi har att $\mathbf{E}[X] = C \cdot \int_1^\infty x^{-3/2}\, dx < \infty$. Låt $Y = X$. Vi får att $\mathbf{E}[X \cdot Y] = C \cdot \int_1^\infty x^{-1/2} = \infty$.

2. Låt $X_n, n = 1, 2, \ldots$, vara likformigt fördelad på $\{1/n, 2/n, \ldots, n/n\}$. Det är lätt att se att $|F_{X_n}(x) - x| \leq 1/n$ fär alla $x \in [0, 1]$, där F_{X_n} förstås är fördelningsfunktionen för X_n.

3. Det räcker att visa att $1 - F_{X_n/n}(x) \to e^{-ax}$ då $n \to \infty$, för alla $x \geq 0$. Men $1 - F_{X_n/n}(x) = \mathbf{P}(X_n/n > x) = \mathbf{P}(X_n > nx) = (1 - a/n)^{[nx]+1} \to e^{-ax}$ då $n \to \infty$.

4. Använd de två Borel-Cantelli-lemmorna på händelserna $\{U_n \in I_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$

5. Låt variablerna $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende, med $\mathbf{P}(X_n = 1) = n^{-1/2}$ och $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - n^{-1/2}$. Vi har förstås att $X_n \to 0$ i sannolikhet, men Borel-Cantellis andra lemma ger att $\mathbf{P}(X_n = 1 \text{ o.o.}) = 1$, så nästan säker konvergens gäller inte.

6. Variablerna X och $-X$ har samma fördelning om de har samma karaktäristiska funktion. Nu gäller att k.f. för $-X$ är $\mathbf{E}[e^{-itX}] = \mathbf{E}[\cos(-tX)] + i\mathbf{E}[\sin(-tX)] = \mathbf{E}[\cos(-tX)] = \mathbf{E}[\cos(tX)] = \phi(t)$, eftersom ϕ är reellvärd. Ty därmed har vi att $0 = \mathbf{E}[\sin(tX)] = -\mathbf{E}[\sin(tX)] = \mathbf{E}[\sin(-tX)]$, (obs, sin är en udda funktion!) och eftersom cos är en jämn funktion.