Tentamensskrivning för kursen SANNOLIKHETSTEORINS GRUNDER
fredagen den 12 mars 2004 kl. 08.45-13.45 i V-huset.
Lärare: Torgny Lindvall. Telefon ankn. 3574 eller hem 242118. Hjälpmedel: Inga.
***********************************************************************
Fullt nöjaktigt löst uppgift ger 5 poäng.

Händelser och stokastiska variabler nedan antas definierade på ett sannolikhetsrum som vi kallar $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1. Formulera och bevisa Borel-Cantellis första lemma.

2. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara stokastiska variabler sådana att $X_n \to a$ i sannolikhet när $n \to \infty$, där $a$ är en konstant. Visa att om $g$ är en funktion som är kontinuerlig i $a$ så gäller att $g(X_n) \to g(a)$ i sannolikhet när $n \to \infty$, men att detta inte behöver vara sant om $g$ inte är kontinuerlig i $a$.

3. Visa att $\mathbf{E}[\cos(Y/n)] \to 1$ när $n \to \infty$ för varje stokastisk variabel $Y$.

4. Den stokastiska variabeln $X$ har fördelning $\mu$. Visa att om $g$ är en funktion sådan att $g(X)$ har ändligt väntevärde, så gäller $\mathbf{E}[g(X)] = \int g(x)\, d\mu(x)$.

5. Låt $m$ beteckna Lebesguemåttet. Visa att till varje $\epsilon > 0$ finns en sluten delmängd $F_\epsilon$ till [0,1] som inte innehåller något rationellt tal och sådan att $m(F_\epsilon) > 1 - \epsilon$.

6. Den stokastiska variabeln $X$ är symmetriskt fördelad kring 0, d.v.s. $-X$ har samma fördelning som $X$. Låt $\phi$ beteckna dess karaktäristiska funktion. Visa att $\phi(t_0) = 1$ för något $t_0 \neq 0$ om och endast om det existerar ett $a \neq 0$ sådant att $\mathbf{P}(X = i \cdot a$ för något heltal $i) = 1$.

**FÖR KORTFATTADE LÖSNINGAR: V.G. VÄND!**

Kortfattade lösningar till SANNOLIKHETSTEORINS GRUNDER den 12/3 2004.
Lärare: Torgny Lindvall.

---

1. Se kompendiet, sid. 53.

2. Tag $\epsilon > 0$, tag sedan $\delta > 0$ så litet att $|g(x) - g(a)| \le \epsilon$ om $|x - a| \le \delta$. Vi får att $\mathbf{P}(|g(X_n) - g(a)| > \epsilon) \le \mathbf{P}(|X_n - a| > \delta)$ som $\to 0$ då $n \to \infty$.
   Med $X_n = 1/n$, och $g(x) = 0$ för $x \le 0$ och $= 1$ för $x > 0$ har vi ett exempel på att kontinuitetskrav måste ställas på $g$.

3. Låt $X_n = \cos(Y/n)$. Vi har att $X_n \to 1$ punktvis då $n \to \infty$, och $|X_n| \le 1$ för alla $n$. Dominerade konvergenssatsen ger att $\mathbf{E}[X_n] \to 1$ då $n \to \infty$.

4. Se kompendiet, sid. 28.

5. Låt $q_1, q_2, \ldots$ vara en uppräkning av de rationella talen i intervallet [0,1]. Tag $\epsilon > 0$, och låt $I_i = (q_i - \epsilon \cdot 2^{-i-1}), q_i + \epsilon \cdot 2^{-i-1}$. Vi har att $m(I_i) = \epsilon \cdot 2^{-i}$, så $m(G) \le \sum_1^\infty \epsilon \cdot 2^{-i} = \epsilon$, där $G$ betecknar unionen av $I_i$-intervallen. Den slutna mängden $[0,1] \backslash G$ har den önskade egenskapen.

6. Symmetrin ger att $\phi(t) = \mathbf{E}[\cos(tX)]$. För tillräckligheten, tag $t_0 = 2\pi/a$. För nödvändigheten, observera att $0 = 1 - \phi(t_0) = \mathbf{E}[1 - \cos(t_0 X)]$. Eftersom $1 - \cos(\cdot) \ge 0$ måste vi alltså ha $\mathbf{P}(\cos(t_0 X) = 1) = 1$, och detta är möjligt endast om $\mathbf{P}(t_0 X = (2\pi) \cdot i$ för något heltal $i) = 1$; tag $a = 2\pi/t_0$.