Tentamensskrivning för kursen SANNOLIKHETSTEORINS GRUNDER
fredagen den 18 mars 2005 kl. 08.30-13.30 i M-huset.
Lärare: Torgny Lindvall. Telefon ankn. 3574 eller hem 242118.
Lärare till hands i skrivsalen c:a 10.00 och 11.45
Hjälpmedel: Inga.
****
Fullt nöjaktigt löst uppgift ger 5 poäng.

Händelser och stokastiska variabler nedan antas definierade på ett sannolikhetsrum som vi kallar $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1. Booles olikhet för en uppräknelig klass av händelser: bevisa den!
2. Formulera Fatous lemma för sekvenser av ickenegativa stokastiska variabler. Det är ju en olikhet; visa med ett exempel att sträng olikhet kan gälla.
3. Beteckna Laplacetransformen för den ickenegativa stokastiska variabeln X med $L(\lambda), \lambda \geq 0$ $(L(\lambda) = E[e^{-\lambda \cdot X}])$. Visa att $L(\lambda) \to \mathbf{P}(X = 0)$ då $\lambda \to \infty$.
4. För sekvenserna X_n och $Y_n, n = 1, 2, \ldots$ av stokastiska variabler gäller att $X_n \to X, Y_n \to Y$ i sannolikhet då $n \to \infty$. Visa att $X_n + Y_n \to X + Y$ i sannolikhet då $n \to \infty$.
5. Ge exempel på en *diskret* stokastisk variabel sådan att dess fördelningsfunktion är *strängt* växande! Tips: betänk att de rationella talen ligger tätt!
6. De stokastiska variablerna $X_2, X_3, \ldots$ är oberoende och exponentialfördelade med parameter 1. Visa att $\sup\{X_n/log(n); n = 2, 3, \ldots\} < \infty$ nästan säkert.
   Tips: Vi har att $\mathbf{P}(X_n > x) = e^{-x}$ för $x \geq 0$. Satsa på en användning av Borel-Cantellis första lemma!

FÖR KORTFATTADE LÖSNINGAR, V.G. VÄND!

Kortfattade lösningar till SANNOLIKHETSTEORINS GRUNDER den 18/3 2005.
Lärare: Torgny Lindvall.

---

1. Beteckna händelserna med $A_1, A_2, \ldots$, och låt A vara deras union. Booles olikhet säger att $\mathbf{P}(A) \leq \sum_1^\infty \mathbf{P}(A_i)$. För att visa detta, låt $B_1 = A_1$, och för $i \geq 2$, låt $B_i = A_i \backslash (A_1 \cup A_2 \ldots \cup \ldots A_{i-1})$. Då är mängderna $B_1, B_2, \ldots$ disjunkta, deras union är $A, B_i \subset A_i$, och vi får att $\mathbf{P}(\bigcup_1^\infty A_i) = \mathbf{P}(\bigcup_1^\infty B_i) = \sum_1^\infty \mathbf{P}(B_i) \leq \sum_1^\infty \mathbf{P}(A_i)$.

2. Se kompendiet, sid. 23. För ett exempel med sträng olikhet, låt $\xi_1, \xi_2, \ldots$ vara oberoende och likafördelade variabler, med väntevärde 1 och $\mathbf{P}(\xi_i = 0) > 0$, och låt $X_n = \prod_1^n \xi_i$. Vi har då att $E[X_n] = 1$ för alla n, och naturligtvis att $\liminf_{n\to\infty} X_n = 0$, ty $X_n = 0$ för $n \geq$ ett stokastiskt N.

3. Observera att $e^{-\lambda \cdot x} \to I_{\{0\}}(x)$ då $\lambda \to \infty$, och vi har monotonitet i konvergensen. Påståendet i uppgiften följer nu av monotona konvergenssatsen, eftersom $E[I_{\{0\}}(X)] = \mathbf{P}(X = 0)$.

4. Vi skall visa att $\forall \epsilon > 0$ gäller $\mathbf{P}(|X_n + Y_n - X - Y| > \epsilon) \to 0$ då $n \to \infty$. Den nämnda sannolikheten är
$= \mathbf{P}(|X_n - X + Y_n - Y| > \epsilon) \leq \mathbf{P}(|X_n - X| + |Y_n - Y| > \epsilon)$
$\leq \mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon/2$ eller $|Y_n - Y| > \epsilon/2)$
$\leq \mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon/2) + \mathbf{P}(|Y_n - Y| > \epsilon/2)$,
och var och en av de två sistnämnda sannolikheterna konvergerar mot 0 när $n \to \infty$.

5. Låt den stokastiska variabeln X anta värdet q_i med sannolikheten 2^{-i}, där $q_i, i = 1, 2, \ldots$ är en uppräkning av de rationella talen. Låt F beteckna fördelningsfunktionen för X. Tag $s < t$. Vi får att $F(s) < F(t)$, ty $F(t) - F(s) = \mathbf{P}(X \in (s, t])$, och den sistnämnda sannolikheten är >0 eftersom det finns ett rationellt tal $\in (s, t]$.

6. Det är lika lätt att visa det skarpare resultatet att händelsen $X_n/\log(n) > 2$ oändligt ofta har sannolikheten 0. Vi har $\mathbf{P}(X_n/\log(n) > 2) = e^{-2\log(n)} = n^{-2}$, och $\sum_2^\infty n^{-2} < \infty$. Med hjälp av Borel-Cantellis första lemma är vi klara.