Tentamensskrivning för kursen SANNOLIKHETSTEORINS GRUNDER
fredagen den 10 mars 2006 kl. 08.30-13.30 i M-huset.
Lärare: Torgny Lindvall. Telefon ankn. 3574 eller hem 242118. Hjälpmedel: Inga.
Tentamensanvarig till hands i skrivningssalen c:a 10.00 och 11.45.
****
Fullt nöjaktigt löst uppgift ger 5 poäng.

Händelser och stokastiska variabler nedan antas definierade på ett sannolikhetsrum som vi kallar $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende stokastiska variabler sådana att $\mathbf{E}[X_i] = 0$ och $\mathbf{E}[X_i^2] \leq 1$ för alla i. Låt $S_n = \sum_1^n X_i$. Visa att $S_n/n \to 0$ i sannolikhet när $n \to \infty$.

2. Den stokastiska variabeln X har fördelningsfunktion F. Visa att F är kontinuerlig om och endast om $\mathbf{P}(X = x) = 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

3. Formulera och bevisa Jensens olikhet.

4. För en sekvens $X_1, X_2, \ldots$ av stokastiska variabler, visa att $X_n \to 0$ i sannolikhet då $n \to \infty$ om $\mathbf{E}[\min(|X_n|, 1)] \to 0$ då $n \to \infty$.

5. Låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler med ändligt väntevärde. Visa noggrant med hjälp av Fubinis sats att $\mathbf{E}[X \cdot Y] = \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y]$.

6. Den stokastiska variabeln X är strikt positiv, och har ändligt väntevärde. Visa att $\mathbf{E}[X^{(1/n)}] \to 1$ då $n \to \infty$.

FÖR KORTFATTADE LÖSNINGAR: V.G. VÄND!

Kortfattade lösningar till SANNOLIKHETSTEORINS GRUNDER den 10/3 2006.
Lärare: Torgny Lindvall.

---

1. Beviset av Sats 6.5 i kompendiet kan användas, dock med den skillnaden att variablerna nu inte är likafördelade. Men $Var[S_n] = \sum_1^n \mathbf{E}[X_i^2] \leq n$, vilket duger gott.

2. Vi vet att F är högerkontinuerlig, så det räcker att granska vänsterkontinuiteten. Fixera ett x. Eftersom F är icke avtagande så räcker det att visa att $F(x - 1/n) \to F(x)$ då $n \to \infty$. Låt μ beteckna fördelningen för X, och låt $A_n = (x - 1/n, x]$ Vi har $F(x) - F(x - 1/n) = \mu(A_n)$. Eftersom $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ vet vi att $\mu(A_n) \to \mu(A)$ då $n \to \infty$, där A är skärningen av A_n-mängderna. Men $A = \{x\}$, så F är alltså kontinuerlig i x om och endast om $\mu(\{x\}) = \mathbf{P}(X = x) = 0$.

3. Låt X vara en stokastisk variabel med ändligt väntevärde, och låt g vara en konvex funktion sådan att $g(X)$ har ändligt väntevärde. Jensens olikhet säger att $\mathbf{E}[g(X)] \geq g(\mathbf{E}[X])$. Detta följer av att det existerar ett λ sådant att $g(x) \geq g(\mathbf{E}[X]) + \lambda \cdot (x - \mathbf{E}[X])$ för alla x. Detta ger: $\mathbf{E}[g(X)] \geq g(\mathbf{E}[X])$ $+\ 0$.

4. Tag $\epsilon > 0$; det är ingen inskränkning att låta $\epsilon \leq 1$. Vi har $\mathbf{E}[\min(|X_n|, 1)] \geq \mathbf{E}[\min(|X_n|, 1) \cdot I_{\{|X_n| > \epsilon\}}] \geq \epsilon \cdot \mathbf{P}(|X_n| > \epsilon)$. Detta medför att $\mathbf{P}(|X_n| > \epsilon) \leq \mathbf{E}[\min(|X_n|, 1)]/\epsilon$, och konvergensen i sannolikhet följer.

5. Se kompendiet, sid. 32-33.

6. Vi har att $X^{(1/n)} \leq 1 + X$ för alla $n = 1, 2, \ldots$, och $\mathbb{E}[1 + X] < \infty$. Eftersom $X > 0$ har vi att $X^{(1/n)} \to 1$ då $n \to \infty$. Vi tillämpar nu Dominerade konvergenssatsen för att bevisa uppgiftens påstående.