Tentamensskrivning för kursen SANNOLIKHETSTEORINS GRUNDER
tisdagen den 18 april 2006 kl. 08.30-13.30 i V-huset.
Lärare: Torgny Lindvall. Telefon ankn. 3574 eller hem 242118. Hjälpmedel: Inga.
Tentamensansvarig till hands i skrivningslokalen c:a 10.00 och 11.45.
****
Fullt nöjaktigt löst uppgift ger 5 poäng.

Händelser och stokastiska variabler nedan antas definierade på ett sannolikhetsrum som vi kallar $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1. Formulera och bevisa Markovs olikhet ("förstamomentmetoden") för icke-negativa stokastiska variabler.

2. Visa att om $X_1, \ldots, X_n$ är stokastiska variabler, så är $\max(X_1, \ldots, X_n)$ en stokastisk variabel.

3. Visa att Lebesguemåttet för de rationella talen är 0.

4. Den stokastiska variabeln X antar värden $0, 1, \ldots$ och har ändligt väntevärde. Den sannolikhetsgenererande funktionen G för X definieras genom $G(s) = \mathbf{E}[s^X]$; Vi kan nöja oss med med att definiera G för $0 \le s \le 1$. Visa att $G'(1) = E[X]$. Obs: det är helt i sin ordning att använda en kontinuerlig variant av Dominerade konvergenssatsen.

5. För de stokastiska variablerna X och Y gäller att $\mathbf{E}[|X|^\alpha] < \infty$ och $\mathbf{E}[|Y|^\alpha] < \infty$, för ett visst $\alpha > 0$. Visa att $\mathbf{E}[|X + Y|^\alpha] < \infty$.

6. Låt $X_1, X_2, \ldots$ och $Y_1, Y_2, \ldots$ vara sekvenser av stokastiska variabler sådana att $X_n \to 0$ n.s. då $n \to \infty$ och $\sum_1^\infty \mathbf{P}(X_n \neq Y_n) < \infty$. Visa att $Y_n \to 0$ n.s. då $n \to \infty$.

FÖR KORTFATTADE LÖSNINGAR: V.G. VÄND!

Kortfattade lösningar till SANNOLIKHETSTEORINS GRUNDER den 18/4 2006.
Lärare: Torgny Lindvall.

---

1. Se kompendiet, sid. 41.

2. Det räcker att visa att $\{\max(X_1,\ldots,X_n) \leq x\} \in \mathcal{F}$ för alla $x \in R$. Men denna händelse är ju skärningen av händelserna $\{X_i \leq x\}, i = 1,\ldots,n$, och tillhör därmed $\mathcal{F}$.

3. Vi vet att $m(\{x\}) = 0$ för varje punkt $x \in R$. Låt $q_1, q_2, \ldots$ vara en uppräkning av de rationella talen Q. Vi får $m(Q) = \sum_1^\infty m(\{q_i\}) = 0$.

4. Vi skall visa att $|(G(s)-1)/(s-1) - \mathbf{E}[X]| \to 0$ när $s \nearrow 1$. Men detta belopp är $\leq \mathbf{E}[|(s^X-1)/(s-1) - X|]$. Nu gäller för alla $i = 1, 2, \ldots$ att $|(s^i-1)/(s-1)| \leq i$, och $(s^i-1)/(s-1) \to i$ då $s \nearrow 1$. Vi kan därför använda Dominerade konvergenssatsen, med $2 \cdot X$ som dominerande variabel.

5. För två reella tal $s, t \geq 0$ gäller att $(s+t)^\alpha \leq (2\max(s,t))^\alpha \leq 2^\alpha(s^\alpha + t^\alpha)$. Vi får därför att $\mathbf{E}[|X+Y|^\alpha] \leq \mathbf{E}[(|X|+|Y|)^\alpha] \leq 2^\alpha(\mathbf{E}[|X|^\alpha] + \mathbf{E}[|Y|^\alpha]) < \infty$.

6. Borel-Cantellis första lemma ger: $\mathbf{P}(X_n = Y_n$ för tillräckligt stora $n) = 1$. Låt $N = \min\{i; X_n = Y_n$ för $n \geq i\}$. Alltså: $Y_n = X_n$ för $n \geq N$, och eftersom $X_n \to 0$ n.s. när $n \to \infty$ är det nu klart att $Y_n \to 0$ n.s. när $n \to \infty$.