

Tentamen i matematisk statistik

Uppgift 1: På en arbetsplats skadades 1% av personalen under ett år. 60% av alla skadade var män. 30% av alla anställda var kvinnor. Är det manliga eller kvinnliga anställda som löper störst risk att råka ut för en skada enligt denna undersökning. (Motivering krävs för att få poäng.)

(6 poäng)

Uppgift 2: En entreprenör har lämnat in anbud på tre olika jobb, A, B och C. Han bedömer sannolikheten att få de olika jobben till 0.5 för A, 0.8 för B och 0.3 för C. Händelserna att få olika jobb anses oberoende. Låt ξ vara totala antalet jobb av dessa tre som entreprenören får.

- Skriv upp utfallsrummet för ξ .
- Bestäm sannolikhetsfördelningen för ξ .
- Vad är $P(0 < \xi \leq 2)$?

(6 poäng)

Uppgift 3: Livslängden för en viss sorts glödlampa är exponentialfördelad med den genomsnittliga livslängden 100 timmar.

- Hur stor är motsvarande standardavvikelse?
- Jag har just satt in en glödlampa av ovanstående slag i en armatur. Hur stor är sannolikheten att lampan har en livslängd som överstiger 65 timmar?
- Efter 50 timmars brinntid fungerar lampan fortfarande. Hur stor är sannolikheten att dess livslängd är ytterligare minst 65 timmar, d.v.s. totalt minst 115 timmar?

(6 poäng)

Uppgift 4: I en gruva kan den malm som bryts per dag anses vara approximativt normalfördelad med medelvärdet 785 ton/dag och standardavvikelsen 60 ton/dag.

- Hur stor är sannolikheten att det en given dag bryts mer än 800 ton malm?
- Anta att man studerar 25 arbetsdagar. Vad är sannolikheten att man under dessa arbetsdagar totalt bryter mer än 20 000 ton malm?
- Anta att man studerar 5 olika dagar. Vad är sannolikheten varje dag (av dessa 5) bryter mer än 800 ton malm?

(8 poäng)

Uppgift 5: I en affär handlar varje tisdag 400 kunder. Antal liter mjölk en kund köper kan betraktas som en stokastisk variabel, ξ , med

$$P(\xi = 0) = 0.3, \quad P(\xi = 1) = 0.5 \quad \text{och} \quad P(\xi = 2) = 0.2.$$

Olika kunders köp är oberoende. Beräkna approximativt sannolikheten att lagret räcker till tisdagens kunder om inköparen i affären tar hem 390 liter.

(6 poäng)

Uppgift 6: American Express gjorde en undersökning för att ta reda på hur stor andel av deras kundkrets som var intresserad av en ny övergripande försäkring. Man valde slumpmässigt ut 250 personer ur sitt kundregister. Av dessa svarande 121 personer att de var intresserade av den nya försäkringen.

- Bilda ett 99%-igt konfidensintervall för totala andelen kunder hos American Express som var intresserade av försäkringen.
- Anta att det krävdes att minst 55% av kunderna var intresserade av försäkringen för att American Express skulle införa den. Använd konfidensintervallet för att ge företaget råd om försäkringen bör införas eller ej.

(6 poäng)

Uppgift 7: Under åren 2006-2008 gjordes noteringar om medelpriset och efterfrågan på en speciell vara:

ÅR	Efterfrågan i ton (y)	Medelpris i 1000 kr (x)
2006	70	4.10
2007	55	4.30
2008	60	4.30

a) När man gör analys av efterfrågan används ofta en matematisk modell av typen $y = a x^b$. Observera att detta inte är en exponentialfunktion, (som skulle ha skrivits $y = ab^x$). När konstanterna a och b beräknas med hjälp av minsta kvadratmetoden logaritmeras efterfrågemodellen på motsvarande sätt som exponentialfunktionen. Bestäm a och b i modellen $y = a x^b$ med hjälp av minsta kvadratmetoden.

b) Hur mycket får varan i genomsnitt kosta om man (enligt modellen) skall kunna förvänta sig en efterfrågan på 75 ton?

(6 poäng)

Uppgift 8: En viss maskin används för precisionstillverkning av enheter som bör väga 785 gram. Man misstänker en viss dag systematiska avvikelser i produktionen så att enheterna blir för lätta. För att kontrollera detta tar man ut ett slumpmässigt urval om 8 enheter ur denna dags produktion. Resultatet blev (i gram):

780 783 781 785 783 786 784 781

Formulera lämplig nollhypotes och mothypotes för att kontrollera om misstanken stämmer. Genomför testet på 5%:s signifikansnivå under förutsättning att mätvärdena är normalfördelade.

(6 poäng)

Lösningar till tentamen i matematisk statistik

Uppgift 1: S = skadade M = män K = kvinnor

$$P(S) = 0.01 \quad P(K) = 0.3 \quad P(M | S) = 0.6$$

$$P(M \cap S) = P(M | S) \cdot P(S) = 0.6 \cdot 0.01 = 0.006$$

	M	K	
S	0.006	0.004	0.01
S ^c	0.694	0.296	0.99
	0.7	0.3	1.00

$$P(S | M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)} = \frac{0.006}{0.7} \approx 0.00857$$

$$P(S | K) = \frac{P(S \cap K)}{P(K)} = \frac{0.004}{0.3} \approx 0.0133 \quad \text{dvs Kvinnor löper störst risk.}$$

Uppgift 2 $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ $P(A) = 0.5$ $P(B) = 0.8$ $P(C) = 0.3$

a) $P(\xi = 0) = P(A^c \cap B^c \cap C^c) = 0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.7 = 0.07$

$$P(\xi = 1) = P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A^c \cap B \cap C^c) + P(A^c \cap B^c \cap C) = 0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.8 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.3 = 0.38$$

$$P(\xi = 2) = P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A^c \cap B \cap C) = 0.5 \cdot 0.8 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.8 \cdot 0.3 = 0.43$$

$$P(\xi = 3) = P(A \cap B \cap C) = 0.5 \cdot 0.8 \cdot 0.3 = 0.12$$

b) $P(0 < \xi \leq 2) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 0.81$

Uppgift 3 ξ = livslängd $\xi = \text{Exp}(\lambda)$ $E(\xi) = \frac{1}{\lambda} = 100$ timmar

a) $\text{Var}(\xi) = \frac{1}{\lambda^2} = 100^2 \Leftrightarrow S(\xi) = \sqrt{\text{Var}(\xi)} = 100$ timmar

b) $P(\xi > 65) = 1 - P(\xi < 65) = 1 - (1 - e^{-\frac{65}{100}}) \approx 0.522$

c) $P(\xi > 115 | \xi > 50) = \frac{P(\xi > 115 \cap \xi > 50)}{P(\xi > 50)} = \frac{P(\xi > 115)}{P(\xi > 50)} = \frac{e^{-1.15}}{e^{-0.50}} = e^{-0.65} \approx 0.522$

Uppgift 4: ξ = antal ton malm bruten under en dag $\xi = N(\mu, \sigma) = N(785, 60)$

a) $P(\xi > 800) = 1 - P(\xi < 800) = 1 - P\left(Z < \frac{800-785}{60}\right) = 1 - P(Z < 0.25) \approx$
 $\approx 1 - 0.5987 = 0.4013$

b) η = antal ton malm bruten under 25 dagar $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{25}$

$$E(\eta) = E(\xi_1) + E(\xi_2) + \dots + E(\xi_{25}) = 25 \cdot 785 = 19625 \text{ ton}$$

$$\text{Var}(\eta) = \text{Var}(\xi_1) + \dots + \text{Var}(\xi_{25}) = 25 \cdot 60^2 \Leftrightarrow S(\eta) = 5 \cdot 60 = 300 \text{ ton}$$

$$P(\eta > 20\,000) = 1 - P(\eta < 20\,000) = 1 - P\left(Z < \frac{20\,000 - 19\,625}{300}\right) =$$
$$= 1 - P(Z < 1.25) \approx 1 - 0.8944 = 0.1056$$

c) ζ = antal dagar som uppfyller villkoret i a-uppgiften
 $\zeta = \text{Bin}(n, p) = \text{Bin}(5, 0.4013)$

$$P(\zeta = 5) = \binom{5}{5} 0.4013^5 \cdot (1 - 0.4013)^0 \approx 0.0104$$

Uppgift 5: ξ = antal liter mjölk som köps av en person

$$P(\xi = 0) = 0.3 \quad P(\xi = 1) = 0.5 \quad P(\xi = 2) = 0.2$$

$$E(\xi) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.2 = 0.9$$

$$\text{Var}(\xi) = 0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.2 - 0.9^2 = 0.49$$

η = antal liter mjölk som köps av 400 personer $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{400}$

$$E(\eta) = E(\xi_1) + E(\xi_2) + \dots + E(\xi_{400}) = 400 \cdot 0.9 = 360$$

$$\text{Var}(\eta) = \text{Var}(\xi_1) + \dots + \text{Var}(\xi_{400}) = 400 \cdot 0.49 = 196$$

$$P(\eta < 390) = P\left(Z < \frac{390 - 360}{\sqrt{196}}\right) = P(Z < 2.14) \approx 0.9838$$

Uppgift 6: $n = 250$ $\hat{p} = \frac{121}{250} = 0.484$

a) $\hat{p} \pm 2.575 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.484 \pm 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.484(1-0.484)}{250}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0.484 \pm 0.0815 \Rightarrow [0.402 - 0.566]$

b) ovanstående intervall innehåller 0.55 som är den nedre gränsen för att företaget skall våga införa försäkringen. Konfidensintervallet är ju bildat så att det i 99 fall av 100 täcker över den sanna andelen. Men vi kan inte utesluta något av de värdena som finns i intervallet. Den sanna andelen kan vara 0.55 eller större men den kan också vara mindre än 0.55. Vårt råd blir därför att man inte med stöd av denna undersökning bör införa försäkringen.

Uppgift 7: $y = ax^b$ logaritmeras till $\ln y = \ln a + b \cdot \ln x$

$\ln y$	$\ln x$
4.2485	1.4110
4.0073	1.4586
4.0943	1.4586

a)

$$\sum_{i=1}^3 \ln y = 12.3501 \quad \sum_{i=1}^3 \ln x = 4.3282 \quad \sum_{i=1}^3 (\ln x)(\ln y) = 17.8116 \quad \sum_{i=1}^3 (\ln x)^2 = 6.2459$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^3 (\ln x)(\ln y) - \frac{\sum_{i=1}^3 \ln x \sum_{i=1}^3 \ln y}{n}}{\sum_{i=1}^3 (\ln x)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \ln x\right)^2}{n}} = \frac{17.8116 - \frac{4.3282 \cdot 12.3501}{3}}{6.2459 - \frac{4.3282^2}{3}} = -4.2$$

$$\ln a = \frac{\sum_{i=1}^3 \ln y}{3} - b \cdot \frac{\sum_{i=1}^3 \ln x}{3} = \frac{12.3501}{3} + 4.2 \cdot \frac{4.3282}{3} = 10.17618 \Rightarrow a = 26269.9$$

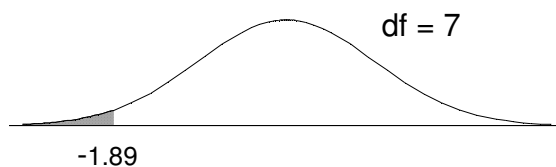
$$y = 26269.9 \cdot x^{-4.2}$$

b) $x^{4.2} = 26269.9 y^{-1} \Rightarrow \ln x = \frac{1}{4.2} (\ln 26269.9 - \ln y) = \frac{1}{4.2} (10.17618 - \ln 75)$
 $= 1.3949 \Rightarrow x = 4.03$ dvs genomsnittspriset är 4030 kr/ton.

Uppgift 8:

- a) **Steg 1:** $H_0: \mu \geq 785$
 $H_1: \mu < 785$

Steg 2: $\alpha = 5\%$



Steg 3: Välj testvariabeln $T = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

Steg 4: Urval gav $\sum x_i = 6263$ och $\sum x_i^2 = 4903177$

$$\bar{x} = 782.875 \quad s^2 = \frac{4903177 - \frac{6263^2}{8}}{8-1} = 4.410714286 \Rightarrow s \approx 2.100$$

$$T = \frac{782.875 - 785}{\frac{2.1}{\sqrt{8}}} \approx -2.86$$

Steg 5: H_0 förkastas. Denna undersökning tyder på att enheterna blir för lätta