Tentamen i matematisk statistik för V den 27 maj 2014

Tentamen består av åtta uppgifter om totalt 50 poäng. Det krävs minst 20 poäng för betyg 3, minst 30 poäng för 4 och minst 40 för 5.

**Examinator:** Ulla Blomqvist

**Hjälpmedel:** Chalmersgodkänd miniräknare, Matematisk statistik av Ulla Blomqvist och Håkan Blomqvists formelsamling. **Boken eller formelsamlingen får inte innehålla egna anteckningar.**

**Telefonjour:** 0709 - 81 60 08 (Besöker tentamen c:a kl 09.30)

***\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_***

***Lycka till!***

**Uppgift 1:** Ett lotteri innehåller 100 lotter varav 5 ger vinst. Först drar Eva en lott och därefter drar Kalle en lott. Låt A vara händelsen att Eva drar en vinstlott och låt B vara händelsen att Kalle drar en vinstlott.

a) Beräkna sannolikheten för B.

b) Beräkna sannolikheten att minst en av dem drar en vinstlott.

(6 poäng)

**Uppgift 2:** Anta att  är en diskret stokastisk variabel med utfallsrummet

 = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} och där

P( = x) = 

a) Beräkna väntevärdet och standardavvikelsen för .

b) Beräkna sannolikheten att få ett primtal.

(6 poäng)

**Uppgift 3:** Man misstänker att en mottagare inte tar emot sända signaler på ett korrekt sätt. För att ta reda på om så är fallet skickar man 10 oberoende meddelanden där varje meddelande innehåller 3 kontrollsignaler. Ett meddelande godtas som korrekt mottaget om åtminstone 2 av kontrollsignalerna mottas korrekt. Anta att sannolikheten är 0.5 att en kontrollsignal mottas korrekt. Beräkna sannolikheten att minst 2 av de 10 meddelandena mottas korrekt.

(6 poäng)

**Uppgift 4:** Antal kunder som besöker en exklusiv boutique antas vara Poissonfördelat med en genomsnitt 1 kund per 10 minut.

a) Vad är sannolikheten att det kommer fler än 5 kunder under en timme?

b) Vad är sannolikheten att det dröjer mellan 15 och 20 minuter mellan 2 kunders ankomster?

(6 poäng)

**Uppgift 5:** Den stokastiska variabeln  har följande frekvensfunktion:

f(x) = 

a) Beräkna konstanten C.

b) Bestäm fördelningsfunktionen för .

c) Beräkna P(  < –0.5 |  < 0 ).

(8 poäng)

**Uppgift 6:** Vikten (i gram) av en slumpmässigt vald tablett är en stokastisk variabel med väntevärdet 0.65 och standardavvikelsen 0.02.

a) Hur stor är sannolikheten att 100 tabletter väger högst 65.3 gram?

b) En ask bör innehålla minst 100 tabletter. För att förenkla påfyllningen av en ask häller man upp tabletter på en vågskål och slutar så snart vikten överstiger 65 gram. Vad är sannolikheten att asken med ett sådant förfarande kommer att innehålla minst 100 tabletter?

(6 poäng)

**Uppgift 7:** Utbytet vid en viss kemisk tillverkningsprocess antas vara normalfördelad. Vid 10 tillverkningsomgångar fick man följande utbyte i kg:

600 570 580 650 700 630 560 620 710 580

a) Beräkna ett 95%-igt konfidensintervall för väntevärdet .

b) Beräkna ett 99%-igt ensidigt uppåt begränsat konfidensintervall för .

c) Ett krav på tillverkningsprocessen är att utbytet i genomsnitt skall vara 670 kg.

Klarar den nuvarande processen att ge detta utbyte?

(6 poäng)

**Uppgift 8:** En mätserie består av nedanstående värden:

x 1 2 3 4 5 6

y 10 23 43 51 60 64

1. Anpassa en 2-gradsfunktion till dessa data.
2. Var har denna funktion sitt maximum?

(6 poäng)

**Lösningar till Matematisk statistik MVE265 den 27 maj 2014**

**Uppgift 1:** 100 lotter varav 5 vinstlotter

A = Eva drar en vinstlott P(A) = 0.05 B = Kalle drar en vinstlott

P(A∩B) =  P(AC∩B) = 

P(A∩BC) =  P(AC∩BC) = 

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **A** | **AC** |  |
| **B** |  |  | = 0.05 |
| **BC** |  |  | = 0.95 |
|  | = 0.05 | = 0.95 | 1 |

1. P(B) = 0.05
2. P(A∪B) = 1 – P(AC∩BC) = 1 – ≈ 0.09798

**Uppgift 2: = x P(= x)**

3 2p

4 p

5 2p

6 p

7 2p

8 p

9 p

10p

Eftersom detta är en sannolikhetsfördelning så gäller att 10p = 1 ⇒ p = 0.1

1. E() = 3 ⋅ 0.2 + 4 ⋅ 0.1 + 5 ⋅ 0.2 + 6 ⋅ 0.1 + 7 ⋅ 0.2 + 8 ⋅ 0.1 + 9 ⋅ 0.1 = 5.7

Var() = 32 ⋅ 0.2 + 42 ⋅ 0.1 + 52 ⋅ 0.2 + 62 ⋅ 0.1 + 72 ⋅ 0.2 + 82 ⋅ 0.1 +

+ 92 ⋅ 0.1 – 5.72 = 3.81

S() =  ≈1.95

1. P(primtal) = 3 ⋅ 2p = 0.6

**Uppgift 3:**

 = antal kontrollsignaler i ett meddelande som mottages korrekt

 är Bin(n, p) = Bin(3, 0.5)

P( ≥ 2) = [P( = 2) + P( = 3)] = [+ ] = 0.5

 = antal meddelande som mottages korrekt

 är Bin(n, p) = Bin(10, 0.5)

P( ≥ 2) = 1 – P( < 2) = 1 – [P( = 0) + P( = 1)] = 1 – [ +

+  ] = 0.98925

**Uppgift 4:**   = antal kunder  är Poissonfördelat med  = 1 kund / 10 min

1. Räkna om   = 6 kunder / timme

P( > 5) = 1 – e-6() ≈ 1 – 04457 = 0.5543

1.  = antal minuter mellan 2 kunders ankomst  är Exp(

Räkna om  till antal kunder / min. = 

 > 15 ⇒ Använd normalapproximation

P(15 <  < 20) = P( < 20) – P( < 15) = (1 – e-0.1⋅20) – (1 – e-0.1⋅15) =

= e-1.5 – e-2 ≈ 0.08779

**Uppgift 5:** Den stokastiska variabeln  har följande frekvensfunktion:

f(x) = 

a) Eftersom f(x) är en frekvensfunktion så gäller att

 ⇒ + =

=  +  =  +  =  ⇒ C = 1.5 fortsättning uppgift 5 på nästa sida

fortsättning uppgift 5

b)

x ≤ –1: F(x) = 

–1 < x ≤ 0: F(x) = =

= 

x > 0: F(x) = 

+  = 0 – 1.5 ( 0 – ) + 1.5  =

=  –  + = 1 – 

Alltså gäller att

F(x) = 

1. P(  < –0.5 |  < 0 ).= 



**Uppgift 6:**  = vikten av en tablett E() = 0.65 gram S() = 0.02 gram

 = vikten av 100 tabletter

E() = E(1) + E(2) + ……. + E(100) = 100 ⋅ 0.65 = 65 gram

Var() = Var(1) + Var(2) + ….. + Var(100) = 100 ⋅ 0.022 ⇒ S() = 0.2 gram

1. P(< 65.3) = P(Z<) = P(Z<1.5) ≈ 0.9332

Fortsättning uppgift 6 på nästa sida

Fortsättning uppgift 6

1. Man fortsätter tills vågen precis överstiger 65 gram ⇒ vikten av 99 tabletter högst får väga 65 gram.

 = vikten av 99 tabletter

E() = E(1) + E(2) + ……. + E(99) = 99 ⋅ 0.65

Var() = Var(1) + Var(2) + ….. + Var(99) = 99 ⋅ 0.022

P(n ≥ 100) = P(< 65) = P(Z<) = P(Z<3.27) ≈ 0.9995

**Uppgift 7:**

n = 10 = 6200 = 3869200

 

 okänd ersatt med s ⇒ använd t-fördelningen med df = 9 ⇒ t = 2.26

1. 620 ± 2.26 ⋅  ⇒ Intervallet blir 582.19 – 657.81

b)  =  = 

1. Nej, värdet 670 ligger inte i intervallet för . Detta tolkar vi så att 670 inte kan vara rätt genomsnittsvärde och att kravet på tillverkningsprocessen inte ger det efterfrågade utbytet.

**Uppgift 8:** y = a + b1x + b2x2

n = 6 = 21 = 91 = 441 = 2275

= 251 = 1073 = 5109

Fortsättning uppgift 8 på nästa sida

Fortsättning uppgift 8

1. normalekvationerna ger följande ekvationssystem:

= 

Lösning av ekvationssystemet ger modellen y = –11.9 + 22.24x – 1.59x2

1. Maximum fås genom derivering.

ymax = 65.87 vilket erhålles för x = 6.99