

Svar till gamla tentamenstal på veckobladen

Veckoblad 1:

Data/Eletro 050401

A = Patienten är ett allvarligt fall

B = Patienten är under 40 år

C = Någon av patientens föräldrar har diabetes

$$a) P(A) = \frac{8+2+20+10}{100} = 0.4 \quad \text{och} \quad P(C) = \frac{15+15+8+20}{100} = 0.58$$

$$\text{d.v.s. } P(A) \cdot P(C) = 0.4 \cdot 0.58 = 0.232 \quad \text{medan} \quad P(A \cap C) = \frac{8+20}{100} = 0.28$$

d.v.s. A och C är beroende

$$b) \quad 1) P(A^C \cap B^C) = P(\text{patienten är ett lindrigt fall över 40 år}) = \frac{15+20}{100} = 0.35$$

$$2) P(A^C \cup B^C) = P(\text{patienten är inte ett allvarligt fall under 40 år}) = \\ = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.10 = 0.90$$

$$3) P(A^C \cap B \cap C^C) = P(\text{patienten är ett lindrigt fall under 40 år vars föräldrar inte har diabetes}) = 0.10$$

Data 981019

15 herrar och n damer

$$1) \text{ varje herre kysser } n \text{ damer} \Leftrightarrow \text{antal kyssar} = 15n$$

$$2) \text{ antal handskakningar mellan herrar} = \binom{15}{2}$$

$$\text{antal handskakningar mellan damer} = \binom{n}{2}$$

$$\text{Antal kyssar} = \text{antal handskakningar} \Leftrightarrow 15n = \binom{15}{2} + \binom{n}{2} \Leftrightarrow$$

$$15n = \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} + \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow 30n = 210 + (n^2 - n) \Leftrightarrow n^2 - 31n + 210 = 0 \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{31}{2} \pm \sqrt{\frac{961}{4} - 210} \Leftrightarrow n = \frac{31}{2} \pm \frac{11}{2} \Leftrightarrow n_1 = 10 \text{ och } n_2 = 21 \quad \textbf{OBS! Två svar}$$

Veckoblad 2:

Data/Eletro 070313

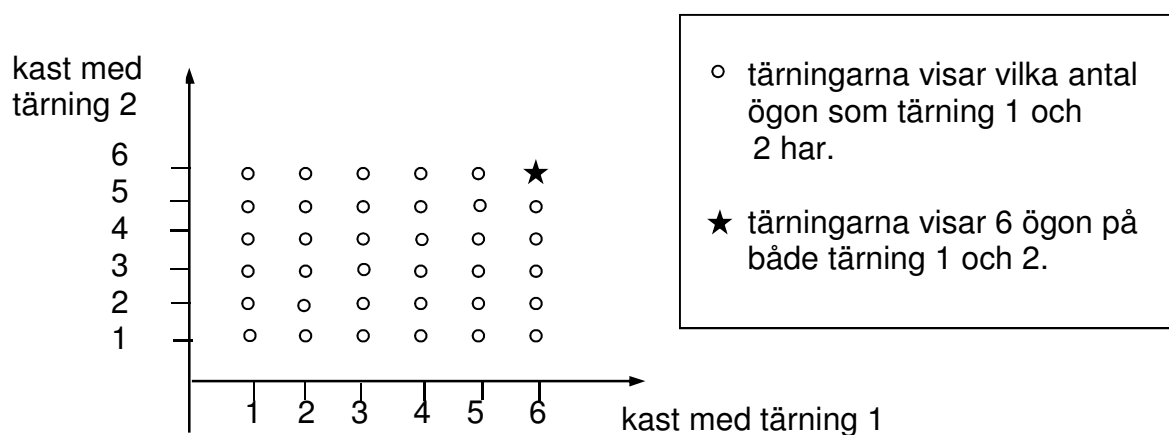
A: Den svarta tärningen kommer upp med 6 ögon.

B: Den vita tärningen kommer upp med 6 ögon.

C: Summan av antal ögon på den svarta och den vita tärningen är udda.

a) Om A och B är oberoende så gäller att $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Ovannämnda situation kan illustreras genom att man ritar in de olika tal-paren i ett spridningsdiagram.

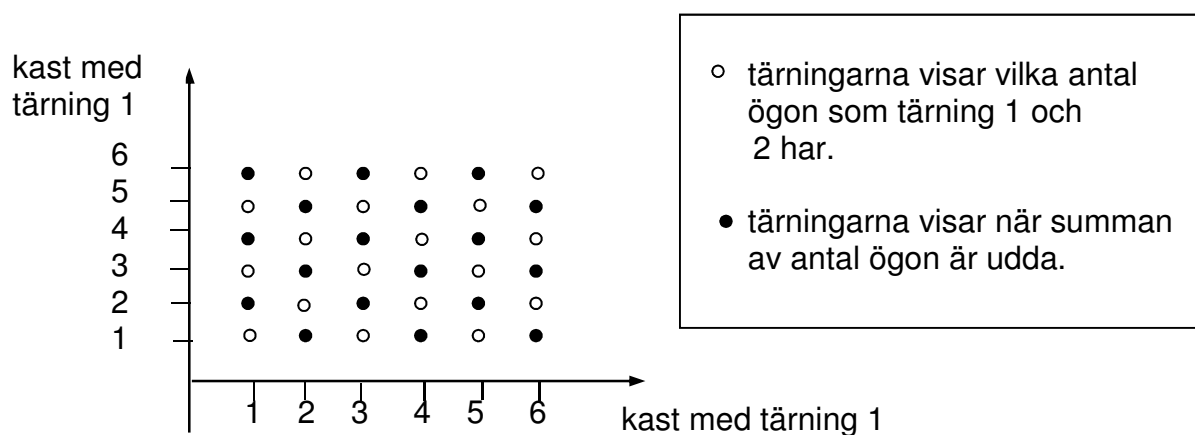


$$P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = (\text{enligt ovanstående figur}) = \frac{1}{36}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = P(A \cap B) \Leftrightarrow A \text{ och } B \text{ är oberoende}$$

b) Denna situation kan illustreras av nedanstående figur



fortsättning uppgift 1b:

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap C) = (\text{fås mha den översta raden svarta prickar i ovanstående figur}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} = P(A \cap C) \Leftrightarrow A \text{ och } C \text{ är oberoende}$$

c) Är de tre händelserna A, B och C oberoende eller beroende av varandra?

$P(A \cap B \cap C) = 0$ eftersom det inte finns någon situation där både tärning 1 och 2 har 6 ögon samtidigt som summan av antal ögon skall vara udda.

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{72} \neq 0 = P(A \cap B \cap C) \Leftrightarrow A, B \text{ och } C \text{ är beroende.}$$

Bygg 991022

Låt F vara händelsen att vi erhållit det felaktiga myntet.

$$P(F) = 0.01 \Rightarrow P(F^C) = 0.99.$$

a) Låt K vara händelsen att vi erhållit en klave i ett kast. Sannolikheten för K blir givetvis olika beroende på vilket mynt vi har valt. Vi får alltså en betingad sannolikhet. Vi antar att mynten är symmetriska.

Alt 1: Myntet, som vi har valt är inte det felaktiga. $\Rightarrow P(K) = 0.5$. Men uppgiften bestod i att vi skulle studera tre kast. Variabeln "antal klavar" är binomialfördelad. Sannolikheten att få tre klavar i tre kast när vi använder ett felfritt mynt blir

$$P(K_1 \cap K_2 \cap K_3) = \binom{3}{3} \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^0 = 0.125$$

Alt 2: Vi har valt det felaktiga myntet. $\Rightarrow P(K) = 1.0$. Eftersom vi erhåller klave varje gång vi kastar så blir även sannolikheten för att erhålla tre klavar i tre kast

$$P(K_1 \cap K_2 \cap K_3) = 1.0$$

Vi kombinerar båda dessa resultat för att få sannolikheten att med ett slumpmässigt valt mynt få tre klavar i tre kast.

$$P(K_1 \cap K_2 \cap K_3) = P(K_1 \cap K_2 \cap K_3 | F^C) \cdot P(F^C) + P(K_1 \cap K_2 \cap K_3 | F) \cdot P(F) = 0.125 \cdot 0.99 + 1.0 \cdot 0.01 = 0.13375$$

Vi kan nu beräkna den efterfrågade sannolikheten genom att använda Bayes sats:

$$P(F | K_1 \cap K_2 \cap K_3) = \frac{P(K_1 \cap K_2 \cap K_3 | F) \cdot P(F)}{P(K_1 \cap K_2 \cap K_3)} = \frac{1.0 \cdot 0.01}{0.13375} \approx 0.075$$

$$\begin{aligned}
b) P(F | n \text{ klavar i } n \text{ kast}) &= \frac{P(K_1 \cap \dots \cap K_n | F) \cdot P(F)}{P(K_1 \cap \dots \cap K_n)} = \\
&= \frac{1.0 \cdot 0.01}{P(K_1 \cap \dots \cap K_n | F) \cdot P(F) + P(K_1 \cap \dots \cap K_n | F^C) \cdot P(F^C)} = \frac{1.0 \cdot 0.01}{1.0 \cdot 0.01 + 0.5^n \cdot 0.99} > 0.90 \\
\Leftrightarrow 1.0 \cdot 0.01 &> 0.90(1.0 \cdot 0.01 + 0.5^n \cdot 0.99) \Leftrightarrow 0.01 - 0.009 > 0.5^n \cdot 0.891 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \frac{0.001}{0.891} &> 0.5^n \Leftrightarrow n \cdot \ln 0.5 > \ln 0.001122334 \Leftrightarrow n(-0.69314718) > -6.79234483 \\
\Leftrightarrow n &> \frac{-6.7923448}{-0.69314718} \approx 9.799 \text{ dvs minst tio kast}
\end{aligned}$$

Veckoblad 3:

Bygg 991022

a) Beräkna sannolikhetsfördelningen för A:s vinst.

Antal kast, η	$P(\eta=y)$	Banken betalar ut	A:s vinst, ξ
0	$\binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$	0	$0 - 50 = -50$
1	$\binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$	100	$100 - 50 = 50$
2	$\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}$	150	$150 - 50 = 100$
3	$\binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}$	200	$200 - 50 = 150$

$$P(\eta=y) = P(\xi=x) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\text{Förväntad vinst: } E(\xi) &= \sum x_i \cdot P(\xi = x_i) = -50 \cdot \frac{125}{216} + 50 \cdot \frac{75}{216} + 100 \cdot \frac{15}{216} + 150 \cdot \frac{1}{216} = \\
&= \frac{-850}{216} = -3.935 \text{ dvs en förlust på c:a 4 franc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b) \text{Var}(\xi) &= \sum x_i^2 \cdot P(\xi = x_i) - [E(\xi)]^2 = ((-50)^2 \cdot \frac{125}{216} + 50^2 \cdot \frac{75}{216} + 100^2 \cdot \frac{15}{216} + \\
&+ 150^2 \cdot \frac{1}{216}) - \left(\frac{-850}{216}\right)^2 = 3097.940243 \Leftrightarrow S(\xi) = 55.659
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c) \text{spelaren vinst: } \zeta &= \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{50} \text{ är ungefär } N(50 \cdot (-3.935); \sqrt{50} \cdot 55.659) = \\
&= N(-196.75; 393.569)
\end{aligned}$$

$$P(\text{bankens vinst} > 0) = P(\zeta \leq 0) = P\left(Z \leq \frac{0 - (-196.75)}{393.569}\right) = \Phi(0.50) = 0.6915$$

Maskin 090827

ξ = antal bilar $\xi = \text{Po}(\lambda = 5 \text{ bilar/15 min})$

a) Räkna om λ till antal bilar/ 5 minuter. $\lambda = 1.667 \text{ bilar/ 5 min}$

$$P(\xi \geq 2) = 1 - P(\xi \leq 1) = 1 - e^{-1.667} \cdot \left(\frac{1.667^0}{0!} + \frac{1.667^1}{1!} \right) \approx 1 - 0.504 = 0.496$$

Veckoblad 4:**Maskin 111214**

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 &\Rightarrow -c \int_{-1}^0 x dx + c \int_0^{\infty} e^{-6x} dx = -c \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + c \left[\frac{e^{-6x}}{-6} \right]_0^{\infty} = \\ &= -c \left(0 - \frac{1}{2} \right) + c \left(0 - \left(-\frac{1}{6} \right) \right) = c \frac{4}{6} \Leftrightarrow c = 1.5 \end{aligned}$$

b)

$x \leq -1$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

$-1 < x < 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + 1.5 \int_{-1}^x (-t) dt = 1.5 \left[-\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^x = 1.5 \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0.75(-x^2 + 1)$$

$0 \leq x$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + 1.5 \int_{-1}^0 (-t) dt + 1.5 \int_0^x e^{-6t} dt = \\ &= 0 + 1.5 \left[-\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^0 + 1.5 \left[\frac{e^{-6t}}{-6} \right]_0^x = 1.5 \left(0 + \frac{1}{2} \right) + 1.5 \left(\frac{e^{-6x}}{-6} + \frac{1}{6} \right) = -0.25e^{-6x} + 1 \end{aligned}$$

Fördelningsfunktionen:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x \leq -1 \\ 0.75(-x^2 + 1) & \text{för } -1 < x < 0 \\ -0.25e^{-6x} + 1 & \text{för } x \geq 0 \end{cases}$$

c) $P(0.5 < \xi) + P(\xi < -0.5) = 1 - P(\xi < 0.5) + P(\xi < -0.5) =$

$$= 1 - \left[-0.25e^{-6x} + 1 \right]_{x=0.5} + \left[0.75(-x^2 + 1) \right]_{x=-0.5} = 0.25e^{-3} + 0.5625 \approx 0.5749$$

Bygg 991022

ξ_i är $\text{Exp}(\lambda_i) \Leftrightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda_i x}$ för $i = 1, 2, 3$ där $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$ och $\lambda_3 = 1$

del 1 och 2: $1 - F(x) = e^{-0.5 \cdot 0.5} = 0.7788$

del 3: $1 - F(x) = e^{-1 \cdot 0.5} = 0.6065$

$P(\text{systemet fungerar}) = P(\text{del 1 fungerar} \cap \text{del 2 fungerar} \cap \text{del 3 fungerar}) =$
(oberoende) $= 0.7788^2 \cdot 0.6065 = 0.368$

Kemi 041216

a) $\lambda = 0.5$ samtal / min $\Leftrightarrow \lambda = 1.5$ samtal / 3 min

$$P(\xi = 0) = e^{-1.5} \frac{1.5^0}{0!} \approx 0.223$$

b) $\lambda = 0.5$ samtal / min $\Leftrightarrow \lambda = 2.5$ samtal / 5 min

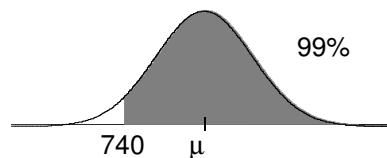
$$P(\xi > 2) = 1 - P(\xi \leq 2) = 1 - e^{-2.5} \left(\frac{2.5^0}{0!} + \frac{2.5^1}{1!} + \frac{2.5^2}{2!} \right) \approx 1 - 0.5438 = 0.4562$$

c) $\eta =$ tiden mellan två samtal $\eta = \text{Exp}(\lambda = 0.5 \text{ samtal / min})$

$$P(\xi > 2) = 1 - P(\xi \leq 2) = 1 - (1 - e^{-0.5 \cdot 2}) = e^{-1} \approx 0.3679$$

Bygg 991022

ξ är $N(\mu, 20)$.



$$P(\xi > 740) = 0.99 \Leftrightarrow P(\xi > 740) = 1 - P(\xi \leq 740) = 1 - P(Z \leq \frac{740 - \mu}{20}) = 0.99 \Leftrightarrow$$

$$P(Z \leq \frac{740 - \mu}{20}) = 0.01 \Leftrightarrow \frac{740 - \mu}{20} = -2.33 \Leftrightarrow \mu = 740 + 20 \cdot 2.33 = \mathbf{786.6}$$

Veckoblad 5:

Väg o vatten 120113

a) ξ = pris på brödet

$\xi = x$	$P(\xi = x)$
20	0.80
8	0.20

$$E(\xi) = 20 \cdot 0.8 + 8 \cdot 0.2 = 17:60$$

$$E(\text{Vinst/bröd}) = 17:60 - 15:-- = 2:60 \text{ kr}$$

b)

$\xi = x$	$P(\xi = x)$
18	0.90
8	0.10

$$E(\xi) = 18 \cdot 0.9 + 8 \cdot 0.1 = 17:--$$

$$E(\text{Vinst/bröd}) = 17:-- - 15:-- = 2:-- \text{ kr}$$

b)

$\xi = x$	$P(\xi = x)$
18	p
8	$1 - p$

$$E(\text{vinst/bröd}) = 18p + 8(1 - p) - 15$$

Om man tolkar frågan så att man måste gå med plus dvs att $E(\xi) > 15:--$ så får man lösningen

$18p + 8 - 8p - 15 = 10p - 7 > 0 \Leftrightarrow p > 0.7$ dvs, det kan innebära att det räcker att efterfrågan första dagen är lite mer än 70%.

Om man tolkar frågan så att man måste gå med få ett bättre resultat än vi d den ordinarie försäljningen dvs att $E(\xi) > 17:60$ så får man lösningen

$18p + 8 - 8p - 15 = 10p - 7 \geq 2:60 \Leftrightarrow p \geq 0.96$ Efterfrågan första dagen måste öka till 96% av tillverkningen.

Data 980116

$$\sigma^2 = 4900$$

$$P(|\bar{x} - \mu| < 20) = P(-20 < \bar{x} - \mu < 20) = P\left(Z < \frac{20}{70/\sqrt{81}}\right) - P\left(Z < \frac{-20}{70/\sqrt{81}}\right) =$$

$$P(Z < 2.571) - P(Z < -2.571) = 0.9898$$

Veckoblad 6:

Data 991022

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 19 & 0 \\ 1 & 20 & 1 \\ 1 & 18 & 1 \\ 1 & 19 & 0 \\ 1 & 22 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 14 \\ 5 \\ 19 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 19 & 20 & 18 & 19 & 22 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 19 & 0 \\ 1 & 20 & 1 \\ 1 & 18 & 1 \\ 1 & 19 & 0 \\ 1 & 22 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 98 & 2 \\ 98 & 1930 & 38 \\ 2 & 38 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_2 & \sum x_1 x_2 & \sum x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 19 & 20 & 18 & 19 & 22 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 14 \\ 5 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 71 \\ 1414 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} 5a + 98b_1 + 2b_2 = 71 \\ 98a + 1930b_1 + 38b_2 = 1414 \\ 2a + 38b_1 + 2b_2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} (1)-(3) & \begin{cases} 3a + 60b_1 = 35 \\ (2)-19 \cdot (3) & \begin{cases} 60a + 1208b_1 = 730 \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) & \begin{cases} 3a + 60b_1 = 35 \\ 60a + 1208b_1 = 730 \end{cases} \Rightarrow (5) - 20 \cdot (4) \Rightarrow 8b_1 = 30 \Leftrightarrow b_1 = 3.75 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3} (35 - 225) = -63.3333 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2} 20.167 = 10.08$$

$$y = -63.33 + 3.75x_1 + 10.08x_2$$

b) Tolkning av koefficienterna

$a = -63.33$ är det antal studietimmar man skulle ha som nyfödd pojke. (nonsens)

$b_1 = 3.75$ är den genomsnittliga skillnaden i antal studietimmar mellan två studenter med ett års åldersskillnad när båda studenterna är av samma kön.

$b_2 = 10.08$ är den genomsnittliga skillnaden i antal studietimmar mellan män och kvinnor i samma åldersklass.

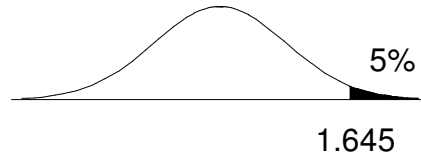
Veckoblad 7:

Kemi 980116

a)

Steg 1 $H_0: \mu \leq 4.5$
 $H_1: \mu > 4.5$

Steg 2 $\alpha = 0.05$



Steg 3 Välj testvariabeln $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$

Steg 4 Urval gav $z = \frac{4.512 - 4.5}{0.02 / \sqrt{16}} = 2.4$

Steg 5 H_0 förkastas.
 Tillverkarens påstående är troligtvis inte korrekt.

b)

$\mu_0 = 4.5$ $\mu_1 = 4.52$

Kritiskt värde uttryckt i normalfördelningen med $\mu = 4.5$ och $\sigma = 0.02$

$\bar{x}^* = 4.50 + 1.645 \cdot \frac{0.02}{\sqrt{16}} = 4.508225$

$\beta = P(\bar{X} < \bar{x}^* \mid \mu = 4.52) = P\left(z < \frac{4.508 - 4.52}{0.02 / \sqrt{16}}\right) = P(z < -2.4) = 0.0082$

Styrkan = $1 - \beta = 0.9918$