

Veckoblad 2

Kapitel 2 i Matematisk statistik, Blomqvist U.

Nya begrepp: oberoende händelser, betingad sannolikhet, Bayes formel.

1. När man skall lösa problem, där snitt mellan händelser ingår, kan det ofta vara till hjälp att använda en korstabell. Antag att vi har 2 händelser A och B.

	A	A ^c	
B	$P(A \cap B)$	$P(A^c \cap B)$	P(B)
B ^c	$P(A \cap B^c)$	$P(A^c \cap B^c)$	P(B^c)
	P(A)	P(A^c)	1.00

När man fyller i ovanstående fyrfältstabell så använder man sig av sambanden att marginalsannolikheterna $P(B)$ och $P(B^c)$ är summan av sannolikheterna i respektive rad, d.v.s. $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$ och $P(B^c) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B^c)$.

2. Skilj på situationer med oberoende och beroende:

Man väljer ut 5 element slumpmässigt från en låda med 20 stycken. För varje element avgörs om det är defekt eller helt. Hur många bland de fem är defekta?

- Om man väljer ut elementen **utan** återläggning så har man **beroende**.
- Om man väljer ut elementen **med** återläggning så har man **oberoende**.

Om man väljer ut 5 element slumpmässigt från en stor produktion så antar man att man har oberoende.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{vid oberoende}$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \quad \text{vid beroende}$$

3. Om man har **oberoende** så används alltså formeln $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Övningar att räkna: 2.23-2.25, 2.30, 2.34

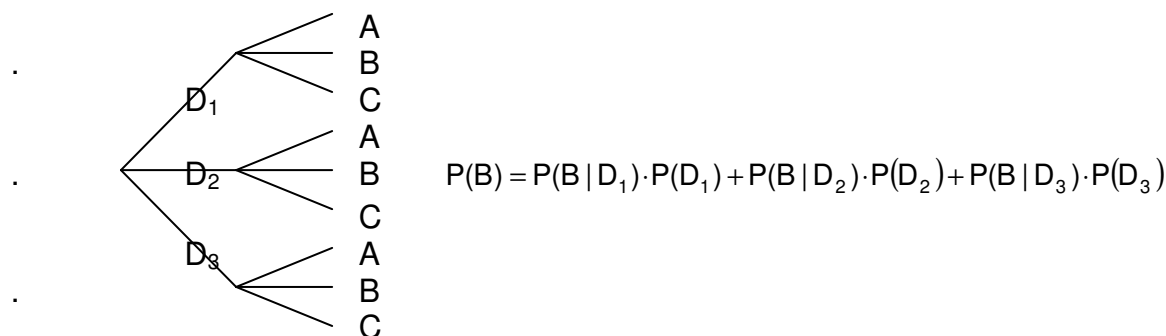
4. Om man har **beroende** så används betingade sannolikheter. Följande formler används

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

$$\text{Bayes sats: } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Övningar att räkna: 2.38, 2.40, 2.44, 2.46

5. Sannolikheter kan åskådliggöras med trädidiagram.



Gammalt tentamenstal (Data/Elektro 070317)

En man kastar 2 symmetriska tärningar, en vit och en svart. Betrakta följande händelser:

A: Den svarta tärningen kommer upp med 6 ögon.

B: Den vita tärningen kommer upp med 6 ögon.

C: Summan av antal ögon på den svarta och den vita tärningen är udda.

a) Är händelserna A och B oberoende eller beroende?

b) Är händelserna A och C oberoende eller beroende?

c) Är de tre händelserna A, B och C oberoende eller beroende av varandra?

För att få poäng på ovanstående deluppgifter måste du motivera ditt svar med hjälp av beräkningar.

(6 poäng)

Gammalt tentamenstal (Bygg 991022):

Anta att vi har 100 stycken en-kronor. Ett av mynten är felaktigt på så sätt att båda sidorna är klavar. Anta att vi slumpmässigt väljer ut en en-krona ur högen. Vi kastar upp myntet i luften tre gånger. Varje gång kommer en klave upp.

a) Vad är sannolikheten att vi erhållit det felaktiga myntet?

b) Anta att man fortsätter att kasta myntet och att klave kommer upp varje gång. Hur många kast måste man göra för att sannolikheten att man har fått det felaktiga myntet skall bli större än 0.90.

(6 poäng)

Kapitel 3 i Matematisk statistik, Blomqvist U.

Nya begrepp: Diskret stokastisk variabel. Sannolikhetsfördelningen beskrivs av sannolikhetsfunktionen $P(\xi=x)$ eller fördelningsfunktionen $P(\xi \leq x)$ väntevärde $[E(\xi)$ eller $\mu]$, varians $[Var(\xi)$ eller $\sigma^2]$ eller standardavvikelse $[S(\xi), \sqrt{Var(\xi)}$ eller $\sigma]$. likformig fördelning, hypergeometerisk fördelning, $Hyp(N, n, p)$, binomialfördelningen, $Bin(n, p)$, och Poissonfördelningen, $Po(\lambda)$.

Snabbrepetition:

1. En sannolikhetsfördelning beskriver hur totala sannolikhetsmassan 1 har fördelats ut över ett antal punkter (ändligt eller uppräkneligt oändligt antal i det diskreta fallet)

2. För en allmän diskret fördelning gäller att

Sannolikhet: $P(\xi = x_k)$

Fördelningsfunktion: $F(x_k) = P(\xi \leq x_k) = \sum_{i=1}^k P(\xi = x_i)$

3. Väntevärdet är det samma som tyngdpunkten i fördelningen. Och beräknas med hjälp av formeln

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(\xi = x_i)$$

Om fördelningen är symmetrisk ligger den i mitten. Ex. vis är vid kast med tärning väntevärdet 3.5.

4. Variansen (eller standardavvikelsen) är ett mått på sannolikhetsmassans spridning. En s.v. som bara kan anta ett värde har variansen noll. Ju större del av sannolikhetsmassan som fördelningen har förlagd långt bort från väntevärdet, desto större varians.

5. Enl. sats 3.2 på sid 73 gäller att variansberäknas enligt

$$\text{Var}[\xi] = E[(\xi - \mu)^2] = E[\xi^2] - \mu^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot P(\xi = x_i) - [E(\xi)]^2 \quad (\text{Steiners sats}).$$

6. Om ξ är en diskret stokastisk variabel med sannolikhetsfunktionen $p(\xi = x)$ på utfallsrummet Ω , då gäller för varje reellvärd funktion g att

$$E[g(\xi)] = \sum_{\Omega} g(x) \cdot p(x)$$

Övningar att räkna: 3.1, 3.2, 3.7, 3.10, 3.11

Gammalt tentamenstal (Maskin 080828):

Ett flygbolag vet att 0.5% av deras passagerare blir av med sitt bagage. Detta kostar flygbolaget i genomsnitt 600 dollar per förlorat bagage.

a) Hur mycket bör man höja flygavgiften (per passagerare) för att täcka denna kostnad?

b) Vilken sannolikhetsfördelning har du använt?

(6 poäng)

Standardfördelningarna för en diskret stokastisk variabel är

Likformig fördelning: ξ är Likf(N)

N = antal möjliga utfall med lika sannolikheter.

$$\text{Sannolikhet: } P(\xi = x) = \frac{1}{N}$$

Exempel: Antal ögon vid ett tärningskast.

Hypergeometrisk fördelning: ξ är Hyp(N, n, p)

N = begränsad mängd.

Np = antal element av ett visst slag.

p = andel element av ett visst slag.

n = antal slumpmässigt utvalda element ur mängden N.

$$\text{Sannolikhet: } P(\xi = x) = \frac{\binom{Np}{x} \cdot \binom{N-Np}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\text{Väntevärde: } E(\xi) = n \cdot p$$

$$\text{Varians: } \text{Var}(\xi) = n \cdot p \cdot (1 - p) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Exempel: Plocka kulor ur en urna utan återläggning.

Övningar att räkna: 3.13, 3.15, 3.17

Binomialfördelningen: ξ är Bin(n, p)

n = antal oberoende upprepningar av ett försök.

p = sannolikheten att händelsen A (eller A^C) inträffar i ett sådant försök.

$$\text{Sannolikhet: } P(\xi = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

$$\text{Väntevärde: } E(\xi) = n \cdot p$$

$$\text{Varians: } \text{Var}(\xi) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Exempel: Antal klavar vid 20 oberoende kast av ett mynt.

Övningar att räkna: 3.14, 3.23

Gammalt tentamenstal (Bygg 991022):

I Monte Carlo:s casino kan man spela olika tärningsspel. Ett spel går till så att en spelare, A, satsar pengar och väljer en siffra mellan 1 och 6. En croupier, som sköter banken, kastar tre tärningar. Om en, två eller tre av tärningarna visar den valda siffran så får A två, tre respektive fyra gånger insatsen av banken. Om ingen av tärningarna visar det valda numret förlorar A. Anta att A satsar 50 franc.

- Beräkna förväntad vinst för A.
- Beräkna standardavvikelsen för A:s förväntade vinst.

(6 poäng)

Poissonfördelningen: ξ är $Po(\lambda)$

λ = genomsnittligt antal händelser i ett intervall.

Sannolikhet: $P(\xi = x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$

Väntevärde: $E(\xi) = \lambda$ Varians: $Var(\xi) = \lambda$

Exempel: Antal båtar som anlägger i en hamn under ett dygn.

Övningar att räkna: 3.24, 3.27

Gammalt tentamenstal (Maskin 090827):

I en vägkorsning kan antal bilar som passerar antas vara Poissonfördelat med en genomsnittlig passeringsfrekvens av 5 bilar på 15 minuter. Vad är sannolikheten att det kommer minst 2 bilar till korsningen under en 5-minuters period?

(3 poäng)

7. I en s.k. Poissonprocess med intensiteten c är antalet bilar som kommer i ett intervall av längden t $Po(ct)$ och antalet bilar i disjunkta intervall oberoende. Intervallen mellan ankomsterna är exponentialfördelade. (Vi kommer till denna fördelning i kap.4)
8. Summan av två variabler som är oberoende och Poissonfördelade med parametrarna λ_1 resp. λ_2 är $Po(\lambda_1 + \lambda_2)$
9. Lagg märke till villkoren vid approximationerna mellan de olika fördelningarna sid 89. Väntevärdet bibehålls dock alltid.

Övningar att räkna: 3.25, 3.26

