Tentamen
MVE301 Sannolikhet, statistik och risk

2018-08-21 kl. 8:30 - 13:30

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Anders Hildeman, telefon: 031-7725325

Hjälpmedel: Valfri miniräknare. Två blad (dvs fyra sidor) handskrivna anteckningar. Tabeller finns längst bak på tentamenstesen.

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 18 poäng, för betyg 4 minst 27 poäng och för betyg 5 minst 36 poäng.

---

1. (6p) Från en normalfördelning med väntevärde och varians μ och σ^2 har det dragits ett stickprov:

$$\mathbf{X} = (0.05,\ 4.35,\ -0.48,\ -0.63,\ 1.17,\ 2.01)$$

(a) Gör ett test av $H_0 : \mu = 0$ mot $H_A : \mu > 0$ på signifikansnivå 10 % under antagandet att σ^2 är okänd.

(b) Gör nu samma sak men antag nu att det är känt att $\sigma^2 = 1.5^2$.

Lösning. Med okänd varians ges ett nedåt begränsat konfidensintervall av konfidensgrad 90 % av

$$\mu \geq \overline{X} - F_{t_5}^{-1}(0.9)\frac{s}{\sqrt{6}} = 1.08 \pm 1.14.$$

Detta betyder att det inte går att förkasta H_0 till förmån för H_A.

Med kännedom om att $\sigma = 1.5$ ges motsvarande konfidensintervall av

$$\mu \geq \overline{X} - \Phi^{-1}(0.9)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.08 \pm 0.78$$

och nollhypotesen kan förkastas på 10 % signifikansnivå.

2. (6p) Antag att paret (X, Y) av stokastiska variabler har täthetsfunktionen

$$f(x, y) = C(xy + x^2y^2),\ 0 < x < y < 1.$$

Beräkna konstanten C, de båda marginaltätheterna $f_X(x)$ och $f_Y(y)$, väntevärdena av X och Y, samt $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$.

Lösning. Eftersom

$$\int_0^1 \int_0^y xy + x^2y^2\, dx\, dy = \frac{13}{72}$$

gäller att $C = 72/13$ och tätheten blir

$$f(x, y) = \frac{72}{13}(xy + x^2y^2),\ 0 < x < y < 1.$$

Vi får

$$f_X(x) = \frac{72}{13}\int_x^1 xy + x^2y^2 dy = \frac{12}{13}(3x + 2x^2 - 3x^3 - 2x^5),\ 0 < x < 1$$

och

$$f_Y(y) = \frac{72}{13}\int_0^y xy + x^2y^2 dx = \frac{12}{13}(3y^3 + 2y^5,\ 0 < y < 1.$$

Väntevärdena blir alltså

$$\mathbb{E}[X] = \frac{12}{13}\int_0^1 x(3x + 2x^2 - 3x^3 - 2x^5)dx = \frac{258}{455} \approx 0.567$$

och

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{12}{13}\int_0^1 y(3y^3 + 2y^5)dy = \frac{372}{455} \approx 0.818.$$

Vidare är

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{72}{13}\int_0^1 \int_0^y xy(xy + x^2y^2)dx\,dy = \frac{25}{52}$$

och därmed

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) = \frac{25}{52} - \frac{258}{455}\cdot\frac{372}{455} = \frac{14221}{828100} \approx 0.0172.$$

3. (6p) Låt X och Y vara stokastiska variabler som är oberoende och Poissonfördelade med parametrar 1 respektive 3.

(a) Vad är fördelningen för $X + Y$?

(b) Vad är fördelningen för X givet att $X + Y = n$?

(c) Vad är $\mathbb{P}(X \geq Y, X + Y \leq 3)$?

Lösning. Summan av två oberoende Poissonfördelade variabler är Poissonfördelad och i det här fallet är $X + Y$ Poissonfördelad med parameter 4. Det gäller att

$$\mathbb{P}(X = k|X + Y = n) = \frac{\mathbb{P}(X + Y = n|X = k)\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} = \frac{\mathbb{P}(Y = n - k)\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X + Y = n)}$$

$$= \frac{e^{-3}\frac{3^{n-k}}{(n-k)!}e^{-1}\frac{1^k}{k!}}{e^{-4}4^n/n!} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k},$$

dvs den betingade fördelningen för X givet att $X + Y = n$ är binomial med parametrar n och 1/4. För del (c):

$$\mathbb{P}(X \geq Y, X{+}Y \leq 3) = \sum_{n=0}^{3}\mathbb{P}(X \geq Y, X{+}Y = n) = \sum_{n=0}^{3}\mathbb{P}(X \geq n/2|X{+}Y = n)\mathbb{P}(X{+}Y = n).$$

Nu använder vi (a) och (b) till att få att detta uttryck är

$$e^{-4}\left(1 + (1/4)4 + \left((1/4)^2 + 2(1/4)(3/4)\right)(4^2/2!) + \left((1/4)^3 + 3(1/4)^2(3/4)\right)(4^3/3!)\right)$$

$$= 43e^{-4}/6 \approx 0.13.$$

4. (5p) En stokastisk variabel X sägs vara Laplacefördelad med parameter λ om den har täthetsfunktionen

$$f(x) = C(\lambda)e^{-\lambda|x|},\ x \in \mathbb{R}.$$

Bestäm konstanten $C(\lambda)$ och ge ML-skattningen för λ om man har observerat ett stickprov $X_1, \ldots, X_n$ på en sådan Laplacefördelning.

Lösning. Eftersom $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|x|}dx = 2\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = 2/\lambda$ och en täthet måste integreras till 1, gäller att

$$C = \frac{\lambda}{2}.$$

Tätheten för hela stickprovet, sedd som funktion av λ blir då

$$L(\lambda) = \frac{\lambda^n}{2^n}e^{-\lambda\sum|x_i|}$$

vars logaritm är

$$l(\lambda) = n \ln \lambda - n \ln 2 - \lambda \sum |x_i|.$$

Derivera detta och sätt till 0 och få ekvationen

$$\frac{n}{\lambda} - \sum |x_i| = 0.$$

Detta ger ML-skattningen

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n |x_i|}.$$

5. (6p) Betrakta den vanliga linjära regressionsmodellen, dvs $(x_1, Y_1), \ldots, (x_n, Y_n)$ är sådana att

$$Y_k = a + bx_k + \epsilon_k$$

där ϵ_k:na är oberoende och normalfördelade med väntevärde 0 och varians σ^2 och a, b och σ^2 är okända parametrar. Antag nu att man observerat data $(0,1)$, $(2,4)$ och $(5,12)$. Skatta a och b och ge ett 95% konfidensintervall för b. Ge också ett 90% prediktionsintervall för Y, där (x,Y) är en ny observation med $x = 3$.

Lösning. Det gäller att $\hat{b} = S_{xy}/S_{xx} = 85/38 \approx 2.24$ och $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x} = 17/38 \approx 0.45$. Vidare är

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\left(S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}\right) = \frac{49}{38}.$$

Därmed

$$b = \hat{b} \pm F_{t_1}^{-1}(0.975)\frac{s}{S_{xx}} = \frac{85}{38}\sqrt{\frac{49/38}{38/3}} \approx 2.24 \pm 4.06 \ (95\%).$$

Prediktionsintervallet är

$$Y = \hat{a} + \hat{b}x \pm F_{t_1}^{-1}(0.95)s\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{(x-\overline{x})^2}{S_{xx}}} \approx 7.13 \pm 8.38 \ (90\%).$$

6. (5p) På en hiss står det “max 4 personer eller 300 kg”. Vad är sannolikheten att vikten av fyra på måfå valda (vuxna) personer verkligen understiger 300 kg? Antag att vikten av en på måfå vald man är normalfördelad med väntevärde 80 kg och standardavvikelse 15 kg och att vikten av en på måfå vald kvinna är normalfördelad med väntevärde 65 kg och standardavvikelse 10 kg.

Lösning. Låt V vara totalvikten av de fyra personerna och låt K vara antalet kvinnor som väljs. Det är rimligt att anta att $K \sim Bin(4, 1/2)$. Enligt totala sannolikhetslagen är

$$\mathbb{P}(V \le 300) = \sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}(V \le 300 | K = k)\mathbb{P}(K = k) = \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\mathbb{P}(V \le 300 | K = k).$$

Givet att $K = k$ så är V normalfördelad med väntevärde $65k + 80(4-k)$ och varians $100k + 225(4-k)$ varför

$$\mathbb{P}(V \le 300) = \frac{1}{16}\binom{4}{k}\Phi\left(\frac{300 - 65k - 80(4-k)}{\sqrt{100k + 225(4-k)}}\right) \approx 0.644.$$

7. (a) Låt Y vara gammafördelad med parametrar 2 och λ och sedan, givet Y, låt X vara likformigt fördelad på $(0, Y)$. Visa att X är exponentialfördelad med parameter λ.

(b) Betrakta en process av impulser där tiderna mellan impulser är oberoende och gammafördelade med parameterar 2 och λ. Tillför nu en extra impuls mellan varje par av närliggande impulser genom välja placeringen av denna nya impuls likformigt mellan de två närliggande impulserna. Visa att den nya processen med de nya impulserna medräknade är en Poissonprocess med intensitet λ.

Lösning. Det gäller att

$$\mathbb{P}(X > x) = \int_x^\infty \mathbb{P}(X > x|Y = t)\lambda^2 te^{-\lambda t}dt = \lambda^2 \int_x^\infty \frac{t-x}{t} te^{-\lambda t}dt = e^{-\lambda x}$$

vilket visar det önskade resultatet i (a) eftersom fördelningsfunktioner helt karaktäriserar fördelningar. I (b) gäller det att visa att tidsavstånden mellan impulserna i den nya processen är oberoende och exponentialfördelade med parameter λ. Del (a) visar detta, förutom oberoendet. För att klara detta får vi utvidga (a) till att visa att X och $Y - X$ blir oberoende och exponentialfördelade. Det gäller att

$$\mathbb{P}(X \geq x, Y - X > y) = \int_{x+y}^\infty \mathbb{P}(X > x, Y - X > y|Y = t)\lambda^2 te^{-\lambda t}dt$$

$$= \lambda^2 \int_{x+y}^\infty \frac{t-(x+y)}{t} te^{-\lambda t}dt = e^{-\lambda(x+y)} = e^{-\lambda x}e^{-\lambda y}$$

vilket visar det önskade resultatet.

8. (5p) Bestäm den momentgenererande funktionen för en stokastisk variabel som är binomialfördelad med parametrar n och p. Använd sedan detta till att visa att om $X_n \sim Bin(n, p)$, så gäller att

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) \to \Phi(x)$$

då $n \to \infty$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Lösning. Skriv X_n som

$$X_n = \sum_{i=1}^n I_i$$

där I_i:na är oberoende indikatorer som är 1 med sannolikhet p. Vi har att

$$M_{I_i}(t) = 1 - p + pe^t$$

varför

$$M_{X_n}(t) = (1 - p + pe^t)^n.$$

För att klara den andra delen är det mer bekvämt att utnyttja att $M_{I_i-p}(t) = (1-p)e^{-pt} + pe^{(1-p)t}$ vilket ger att

$$M_{X_n-np}(t) = \left((1-p)e^{-pt} + pe^{(1-p)t}\right)^n$$

och därför

$$M_{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}}(t) = \left((1-p)e^{-pt/\sqrt{np(1-p)}} + pe^{(1-p)t/\sqrt{np(1-p)}}\right)^n.$$

För att visa det önskade resultatet räcker det att visa att högerledet konvergerar mot $e^{t^2/2}$ då $n \to \infty$ för godtyckligt t. Exponenterna i högerledet går mot 0 då $n \to \infty$ och enligt Taylors formel gäller

$$e^{-pt/\sqrt{np(1-p)}} = 1 + \frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{pt^2}{n(1-p)} + c_1(p,n)\frac{t^3}{n^{3/2}}$$

och

$$e^{(1-p)t/\sqrt{np(1-p)}} = 1 + \frac{(1-p)t}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{(1-p)t^2}{np} + c_2(p,n)\frac{t^3}{n^{3/2}},$$

där det finns ett $C < \infty$ (som beror av p) sådant att $0 \leq c_1, c_2 \leq C$. Efter lite räkning får vi att högerledet är

$$\left(1 + \frac{t^2}{2n} + (c_1 + c_2)\frac{1}{n^{3/2}}\right)^n$$

som konvergerar mot $e^{t^2/2}$.

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

s	97.5 % percentile $r=2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101