Tentamen
MVE301 Sannolikhet, statistik och risk

2019-08-20 kl. 8:30 - 13:30

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Filip Wikman, telefon: 031-7725325

Hjälpmedel: Valfri miniräknare. Två blad (dvs fyra sidor) handskrivna anteckningar. Tabeller finns längst bak på tentamenstesen.

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 18 poäng, för betyg 4 minst 27 poäng och för betyg 5 minst 36 poäng

---

1. (6p) Låt $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ och $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ vara stickprov på varsin normalfördelning med väntevärden μ_x respektive μ_y och varianser σ_x^2 respektive σ_y^2. Gör ett symmetriskt 95 % konfidensintervall för $\mu_x - \mu_y$

(a) under antagandet att de två varianserna är okända men lika,

(b) under antagandet att det är känt att $\sigma_x^2 = 1$ och $\sigma_y^2 = 2$,

med följande data:

$$\mathbf{X} : -0.4623,\ 0.8339,\ -3.2588,\ -0.1378,\ -0.6812,\ -2.3077$$

$$\mathbf{Y} : 0.5664,\ 1.3426,\ 4.5784,\ 3.7694,\ -0.3499.$$

Lösning: I (a) gäller att konfidensintervallet har standardformel

$$\mu_x - \mu_y = \overline{X} - \overline{Y} \pm F^{-1}_{t_{m+n-2}}(0.975) s_P \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}.$$

Här gäller att

$$s_P^2 = \frac{(m-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2}{m+n-2}$$

som i vårt fall blir 3.23 och därmed $s_P = 1.80$. Vidare är medelvärdena för stickproven -1.00 respektive 1.98, så

$$\mu_x - \mu_y = -2.98 \pm 2.26 \cdot 1.80 \cdot \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{5}} = -2.98 \pm 2.47.$$

I del (b) utnyttjar via att $\overline{X}$ är normalfördelad med väntevärde μ_x och varians $\sigma_x^2/6 = 1/6$ och $\overline{Y}$ är normalfördelad med väntevärde μ_y och varians $\sigma_y^2/5 = 2/5$. Detta betyder att $\overline{X} - \overline{Y}$ är normal med väntevärde $\mu_x - \mu_y$ och varians $1/6 + 2/5 = 17/30$. Därför blir

$$\mu_x - \mu_y = -2.98 \pm \Phi^{-1}(0.975)\sqrt{\frac{17}{30}} = -2.98 \pm 1.45.$$

2. (6p) Låt X och Y vara två stokastiska variabler som har tätheter $f_X(x) = 2x$, $0 < x < 1$ och $f_Y(x) = 3x^2$, $0 < x < 1$. Beräkna väntevärde och varians av X och Y. Beräkna också väntevärde och varians av den stokastiska variabeln $Z = IX + (1-I)Y$ där I är oberoende av X och Y och $\mathbb{P}(I = 1) = \mathbb{P}(I = 0) = 1/2$.

Lösning: Vi har att

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x f_X(x)dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

och på samma sätt

$$\mathbb{E}[Y] = 3\int_0^1 x^3 dx = \frac{3}{4}.$$

Vidare är

$$\mathbb{E}[X^2] = 2\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{2}$$

och

$$\mathbb{E}[Y^2] = 3\int_0^1 x^4 dx = \frac{3}{5}.$$

Därmed är

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

och på samma sätt

$$\mathbb{V}\text{ar}(Y) = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}.$$

Eftersom I är oberoende av X och Y gäller att

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[I]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[1-I]\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) = \frac{17}{24}$$

och, eftersom $I(1-I) = 0$,

$$\mathbb{E}[Z^2] = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2]\right) = \frac{11}{20}.$$

Då blir

$$\mathbb{V}\text{ar}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 = \frac{11}{20} - \frac{17^2}{24^2} = 139/2880.$$

3. (5p) Dra först en stokastisk variabel Λ, där $\mathbb{P}(\Lambda = 1) = 0.7$, $\mathbb{P}(\Lambda = 2) = 0.2$ och $\mathbb{P}(\Lambda = 3) = 0.1$, och sedan givet $\Lambda = \lambda$ en stokastisk variabel X som är Poissonfördelad med parameter λ. Bestäm $\mathbb{P}(\Lambda = \lambda | X = 3)$ för $\lambda = 1, 2, 3$.

Lösning: Enligt Bayes formel är

$$\mathbb{P}(\Lambda = \lambda | X = 3) = \frac{\mathbb{P}(X = 3 | \Lambda = \lambda)\mathbb{P}(\Lambda = \lambda)}{\sum_{j=1}^3 \mathbb{P}(X = 3 | \Lambda = j)\mathbb{P}(\Lambda = j)}.$$

Skriv $S_j = \mathbb{P}(X = 3 | \Lambda = j)\mathbb{P}(\Lambda = j)$ och $S = S_1 + S_2 + S_3$. Då är

$$S_1 = 0.7e^{-1}\frac{1}{3!},\ S_2 = 0.2e^{-2}\frac{2^3}{3!},\ S_3 = 0.1e^{-3}\frac{3^3}{3!}$$

och vi får

$$\mathbb{P}(\Lambda = \lambda | X = 3) = \frac{S_\lambda}{S}.$$

Avrundade värden blir $S_1/S = 0.423$, $S_2/S = 0.356$, $S_3/S = 0.221$.

4. (5p) Låt $X_1, \ldots, X_m$ vara ett stickprov på en fördelning som har täthetsfunktion $f(x) = 6x(1-x)$, $0 < x < 1$ och $Y_1, \ldots, Y_n$ vara ett stickprov på en $likf(0,1)$-fördelning. Låt $m = 200$, $n = 100$ och beräkna approximativt

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^m X_k + \sum_{k=1}^n Y_k > 160\right).$$

Lösning: Skriv $S_x = \sum_{k=1}^{200} X_k$ och $S_y = \sum_{k=1}^{100} Y_k$. Det gäller att

$$\mathbb{E}[X_k] = \int_0^1 6x^2(1-x)dx = \frac{1}{2},\ \mathbb{E}[X_k^2] = \int_0^1 6x^3(1-x) = \frac{3}{10}$$

så

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}.$$

Det gäller också (standardkunskap) att $\mathbb{E}[Y_k] = 1/2$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_k) = 1/12$. Enlig CGS gäller att S_x är approximativt normalfördelad med väntevärde $200 \cdot (1/2) = 100$ och varians $200 \cdot (1/20) = 10$. Det gäller också att S_y är approximativt normal med väntevärde 50 och varians $100/12 = 25/3$. Alltså gäller approximativt att $S_x + S_y \sim N(150, 55/3)$ (ty $10 + 25/3 = 55/3$). Alltså

$$\mathbb{P}(S_x + S_y \leq 160) \approx \Phi\left(\frac{160-150}{\sqrt{55/3}}\right) \approx 0.990$$

så

$$\mathbb{P}(S_x + S_y > 160) \approx 0.010.$$

5. (5p) Betrakta täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}},\ x > 1.$$

Här är $\theta > 0$ en okänd parameter. Ett stickprov $X_1, X_2, \ldots, X_n$ på denna fördelning samlas in. Vad blir ML-skattningen av θ?

Lösning: Likelihoodfunktionen för stickprovet blir

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^n \frac{\theta}{x_k^{\theta+1}} = \frac{\theta^n}{(\prod x_k)^{\theta+1}}.$$

Logaritmera och få

$$\ell(\theta; x_1, \ldots, x_n) = n \ln\theta - (\theta+1)\sum \ln x_k.$$

Derivera m.a.p. θ och sätt till 0 och få ekvationen

$$\frac{n}{\theta} - \sum \ln x_k = 0$$

vilket ger

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \ln x_k}.$$

6. (5p) Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara oberoende och likformigt fördelade mellan 0 och 1. Skriv $X_{(j)}$ för den j:te minsta av dessa. Bestäm fördelningsfunktion och väntevärde av $X_{(j)}$, $j = 1, \ldots, n$. Bestäm också

$$\mathbb{P}\left(X_{(j)} < \frac{j}{n} < X_{(j+1)}\right).$$

Lösning: Det gäller att händelserna $\{X_1 \leq x\}, \ldots, \{X_n \leq x\}$ är oberoende och har alla sannolikhet x. Därför är antalet observationer som understiger x an binomialfördelad stokastisk variable med parametrar n och x. För att $X_{(j)} \leq x$ ska inträffa krävs att minst j observationer understiger x och därför blir

$$F_{(j)}(x) = \mathbb{P}(X_{(j)} \leq x) = \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Väntevärdet fås som

$$\mathbb{E}[X_{(j)}] = \int_0^1 \mathbb{P}(X_{(j)} > x)dx = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{n}{k} \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx = \frac{j}{n+1}.$$

För den sista sannolikheten i uppgiften gäller att händelsen i fråga inträffar precis då exakt j observationer är mindre än j/n och alltså är

$$\mathbb{P}(X_{(j)} < \frac{j}{n} < X_{(j+1)}) = \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^j \left(\frac{n-j}{n}\right)^{n-j}.$$

7. (4p) LR-test: Antag att $X_1, \ldots, X_n$ är ett stickprov på en fördelning med täthetsunktion $f_\theta(x)$ som beror av den okända parametern θ. Ibland vill man testa $H_0 : \theta = \theta_0$ mot en enpunkts alternativhypotes $H_A : \theta = \theta_1$. Principen som brukar tillämpas är likelihood ratio (LR)-principen; förkasta H_0 på signifikansnivå α om

$$\frac{L(\theta_1; x_1, \ldots, x_n)}{L(\theta_0; x_1, \ldots, x_n)} > c_\alpha$$

för ett lämpligt valt c_α. Detta kallas för att göra ett LR-test.

Antag nu att X_k:na är $N(\theta, 1)$-fördelade och vi vill testa $H_0 : \theta = 0$ mot $H_A : \theta = 1$. Visa att detta test blir exakt detsamma som standardtestet av $H_0 : \theta = 0$ mot $H_A : \theta > 0$.

Lösning: I det fall som uppgiften gäller är

$$\frac{L(\theta_1; x_1, \ldots, x_n)}{L(\theta_0; x_1, \ldots, x_n)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum(x_k-1)^2}}{e^{-\frac{1}{2}\sum x_k^2}}.$$

Att denna kvot överstiger c_α är ekvivalent med att logaritemn av kvoten överstiger $\ln c_\alpha$. Logaritmen är $\sum x_k^2/2 - \sum(x_k-1)^2/2 = \sum x_k - n/2 = n(\overline{x} - 1/2)$ och testet kommer att förkasta om

$$\overline{x} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \ln c_\alpha.$$

Med andra ord: testet förkastar $H_0 : \theta = 0$ om $\overline{x}$ blir tilläckligt stor, säg $\overline{x} > b$, vilket är precis vad standardtestet av $H_0 : \theta = 0$ mot $H_A : \theta > 0$ också gör. Exakt hur b ska väljas bestäms i båda fallen av att $\mathbb{P}_{H_0}(\overline{x} > b) = \alpha$.

8. (4p) Låt X vara en positiv diskret stokastisk variabel och $Y_1, Y_2, \ldots$ vara oberoende och likafördelade och oberoende av X. Skriv M_X för momentgenererande funktion för X och M_Y för momentgenererande funktion for Y_k. Låt

$$T = \sum_{k=1}^{X} Y_k$$

och bestäm momentgenererande funktion för T i termer av M_X och M_Y.

Lösning: Det gäller att

$$\begin{aligned} M_T(s) &= \mathbb{E}[e^{sT}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{sT}|X]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{\sum_{k=1}^X Y_k}|X]] = \mathbb{E}[M_Y(s)^X] \\ &= \mathbb{E}[e^{(\ln M_Y(s))X}] = M_X(\ln M_Y(s)). \end{aligned}$$

9. (5p) Ett stickprov på en okänd kontinuerlig fördelning gav de tio observationerna -14, 3, -7, -2, 8, 18, -6, -5, -8, 10.

(a) Gör ett parameterfritt test av nollhypotesen $m = 0$ på 5% signifikansnivå utan att göra några som helst antaganden om den okända fördelningen. (Här är m medianen för fördelningen.)

(b) Antag att data kommer från en symmetrisk fördelning (så att m också är väntevärdet). Gör återigen att test av $m = 0$ med lämplig testfunktion. Signifikansnivå 5%.

Lösning. I del (a) är det endast ett teckentest som är lämpligt. Låt X vara antalet positiva observationer. Under H_0 är X binomialfördelad med parametrar 10 och 1/2. Avvikelser från $X = 5$ tyder på att $m \neq 0$. Nu observerade vi att $|X - 5| = 1$, så testet p-värde blir $1 - \mathbb{P}_{H_0}(|X - 5| = 0) = 0.51$, så nollhypotesen kan verkligen inte förkastas. I del (b) kan vi använda ett Wilcoxon signed rank test. Testfunktionen är $W = \sum_{i:X_i>0} R_i$ där R_i är rangen av observation i. I vårt fall observerades $W = 26.5$ och enligt tabell skall man förkasta H_0 om $W \leq 9$ eller $W \geq 46$, vilket inte är fallet, så vi kan inte förkasta.

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r=2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r=2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r=2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101