Tentamen
MVE301 Sannolikhet, statistik och risk

2019-10-11 kl. 8:30 - 13:30

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Olof Zetterqvist, telefon: 031-7725325

Hjälpmedel: Valfri miniräknare. Två blad (dvs fyra sidor) handskrivna anteckningar. Tabeller finns längst bak på tentamenstesen.

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 12 poäng, för betyg 4 minst 18 poäng och för betyg 5 minst 24 poäng

---

1. (5p) Betrakta tre urnor; urna A som innehåller 8 vita och 5 svarta bollar, urna B som innehåller 4 vita och 8 svarta bollar och urna C som innehåller 7 vita och 7 svarta bollar. Välj en urna på måfa och ta ur den urnan tre bollar på måfå. Låt V vara antalet vita bollar och låt S vara antalet svarta bollar som väljs. Vad är frekvensfunktionen för V? Vad är väntevärdena av V och S? Vad är den betingade sannolikheten att bollarna kom från urna A givet att det valdes två svarta och en vit boll?

Lösning. Låt $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Antal sätt att välja k vita och $3-k$ svarta bollar ur urna A är

$$\binom{8}{k}\binom{5}{3-k}$$

och det totala antalet sätt att välje tre kulor ur urna A är $\binom{13}{5}$. Därför blir

$$\mathbb{P}(V = k|A) = \frac{\binom{8}{k}\binom{5}{3-k}}{\binom{13}{5}}$$

där A är händelsen att urna A väljs. Man beräknar $\mathbb{P}(V = k|B)$ och $\mathbb{P}(V = k|C)$ analogt och med händelserna B och C analogt definierade. Det följer att

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V = k) &= \mathbb{P}(V = k|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(V = k|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(V = k|C)\mathbb{P}(C) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\binom{8}{k}\binom{5}{3-k}}{\binom{13}{5}} + \frac{\binom{4}{k}\binom{8}{3-k}}{\binom{12}{5}} + \frac{\binom{7}{k}\binom{7}{3-k}}{\binom{14}{5}}\right).\end{aligned}$$

Det gäller att

$$\mathbb{E}[V] = \sum_{k=0}^{3} k\mathbb{P}(V = k).$$

Enligt formeln för $\mathbb{P}(V = k)$ får vi $\mathbb{P}(V = 1) = 1137/2860$, $\mathbb{P}(V = 2) = 289/780$, $\mathbb{P}(V = 3) = 887/8580$. Detta ger

$$\mathbb{E}[V] = \frac{113}{78}$$

och sedan $\mathbb{E}[S] = 3 - \mathbb{E}[V] = 128/78$. Slutligen gäller

$$\mathbb{P}(A|V = 1) = \frac{\mathbb{P}(V = 1|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(V = 1)} = \frac{\binom{8}{1}\binom{5}{2}\frac{1}{3}}{1137/2860} = \frac{800}{3411}.$$

2. (5p) Låt $X(t)$, $t \in [0, \infty)$ vara en Poissonprocess med intensitet 1.

(a) Beräkna $\mathbb{P}(X(3) \leq 1)$.

(b) Använd centrala gränsvärdessatsen till att approximera $\mathbb{P}(X(100) \geq 110)$. (Kom ihåg att tidsmellanrummen mellan impulser är oberoende och exponentialfördelade.)

Lösning. Det gäller att $X(3) \sim Poi(3)$, så

$$\mathbb{P}(X(3) \leq 1) = e^{-3}(1 + \frac{3}{1!}) = 4e^{-3}.$$

För (b), skriv $T_1, T_2, \ldots$ för tidsmellanrummen mellan impulserna (med T_1 tiden från start till första impulsen). Skriv $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$. Det gäller att $X(100) \geq 110$ är ekvivalent med $S_{110} \leq 100$. Enligt CGS gäller att $S_n \approx N(n, n)$, ty väntevärde och varians är båda 1 för $exp(1)$-fördelningen. Alltså $S_{110} \approx N(110, 110)$, så

$$\mathbb{P}(X(100) \geq 100) = \mathbb{P}(S_{110} \leq 100) \approx \Phi\left(\frac{100 - 110}{\sqrt{110}}\right) \approx 0.17.$$

3. (6p) Gör en linjär regression med följande data:

x	1	2	3	4	5
y	96	84	70	58	52

Skatta regressionslinjen $y = a + bx$, gör ett symmetriskt konfidensintervall med 95% konfidensgrad för b och gör ett symmetriskt prediktionsintervall med prediktionsgrad 90% för en ny observation vid $x = 6$.

Lösning: Data ger oss $n = 5$, $\sum x_k = 15$, $\sum y_k = 360$, $\sum x_k y_k = 966$, $\sum x_k^2 = 55$, $\sum y_k^2 = 27240$. Detta ger $S_{xx} = \sum x_k^2 - (1/5)(\sum x_k)^2 = 55 - (1/5)15^2 = 10$, $S_{xy} = \sum x_k y_k - (1/5)(\sum x_k)(\sum y_k) = 966 - (1/5) \cdot 15 \cdot 360 = -114$, $S_{yy} = 27240 - (1/5) \cdot 360^2 = 1320$. Detta ger i sin tur

$$\hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = -\frac{114}{10} = -11.4$$

och

$$\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x} = \frac{1}{5}(360 - 11.4 \cdot 15) = 106.2.$$

Den skattade regressionslinjen är alltså

$$y = 106.2 - 11.4x.$$

För konfidensintervallet behövs

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\left(S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}\right) = \frac{1}{3}\left(1320 - \frac{114^2}{10}\right) = 6.8.$$

Då får vi som symmetriskt 95% konfidensintervall

$$b \in \hat{b} \pm F_{t_3}^{-1}(0.975)\frac{s}{\sqrt{S_{xx}}} = -11.4 \pm 3.182\sqrt{\frac{6.8}{10}} \approx -11.4 \pm 2.6.$$

Prediktionsintervallet for en observation Y av prediktionsgrad $1 - \alpha$ vid ett givet värde på x i allmän form är

$$Y \in \hat{a} + \hat{b}x \pm F_{t_{n-2}}^{-1}(1 - \alpha/2)s\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \overline{x})^2}{S_{xx}}}.$$

I vårt fall får vi

$$Y \in 106.2 - 11.4 \cdot 6 \pm 2.353 \cdot \sqrt{6.8}\sqrt{\frac{6}{5} + \frac{3^2}{10}} = 37.8 \pm 8.9$$

med prediktionsgrad 90%.

4. (5p) Låt $X_1, X_2, \dots, X_n$ vara att stickprov på en fördelning som har täthetsfunktion $C\lambda e^{-\lambda x}$, $0 < x \le 1/\lambda$ (observera att detta är en trunkerad exponentialfördelning och inte en vanlig exponentialfördelning). Beräkna konstanten C och gör sedan en ML-skattning av λ.

Lösning. För att beräkna C utnyttjar vi att

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C\int_0^{1/\lambda} \lambda e^{-\lambda x}dx = C(1-e^{-1})$$

så

$$C = \frac{1}{1-e^{-1}}.$$

För ML-skattning ska vi maximera likelihoodfunktionen $L(\lambda) = L(\lambda;\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$ m.a.p. λ. Eftersom $f(x) = 0$ då $x \ge 1/\lambda$, dvs $\lambda \ge 1/x$, gäller att

$$L(\lambda) = \begin{cases} C^n\lambda^n e^{-\lambda\sum x_i}, & \lambda \le 1/\max_i x_i \\ 0, & \lambda > 1/\max_i x_i \end{cases}$$

Detta ger

$$\ell(\lambda) = \ln L(\lambda) = \begin{cases} n\ln C + n\ln\lambda - \lambda\sum x_i, & \lambda \le 1/\max_i x_i \\ -\infty, & \lambda < 1/\max_i x_i \end{cases}$$

Funktionen $g(\lambda) = n\ln C + n\ln\lambda - \sum x_i$ har stationär punkt då $g'(\lambda) = n/\lambda - \sum x_i = 0$ som har den enda lösningen $\lambda = 1/\overline{x}$ och denna punkt är ett maximum eftersom $g''(\lambda) = -n/\lambda^2 < 0$. Detta betyder att g är växande för $\lambda < 1/\overline{x}$. Eftersom $1/\overline{x} \ge 1/\max_i x_i$ betyder detta att $\ell(\lambda)$ maximeras när λ väljs som ändpunkt till intervallet då $\ell(\lambda) \ge 0$, dvs vi får

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\max_i x_i}.$$

5. (5p) Låt (X,Y) vara likformigt fördelad på området $0 < y < x^3 < 1$. Beräkna tätheterna f_X och f_Y, de betingade tätheterna $f_{Y|X}$ och $f_{X|Y}$ och det betingade väntevärdet $\mathbb{E}[Y|X = x]$, $x \in (0,1)$.

Lösning. Att (X,Y) är likformig fördelad över området betyder att $f(x,y)$ är konstant, $f(x,y) = C$, över det aktuella området och 0 utanför. Eftersom $\int_0^1\int_0^{x^3} dy\,dx = 1/4$ gäller att $f(x,y) = 4$, $0 < y < x^3 < 1$. Vi har

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = 4\int_0^{x^3} dy = 4x^3,\ 0 < x < 1.$$

och

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = 4\int_{y^{1/3}}^1 dx = 4(1-y^{1/3}),\ 0 < y < 1.$$

Då får vi

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{4}{4(1-y^{1/3})} = \frac{1}{1-y^{1/3}},\ y^{1/3} < x < 1,$$

dvs givet $Y = y$ är X likformigt fördelad på $(y^{1/3}, 1)$. Vi har också

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{x^3},\ 0 < y < x^3,$$

dvs givet $x = X$ är y likformigt fördelad mellan 0 och x^3. Det betyder också att

$$E[Y|X = x] = \frac{1}{2}x^3.$$

6. (4p) Låt $X_1, X_2, \dots$ vara $\{0,1\}$-värda stokastiska variabler sådana att

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{1+i}, \; i = 1, 2, \dots .$$

Låt $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(a) Beräkna $\mathbb{E}[S_n]$ och $\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)$.

(b) Visa att det för varje $a > 0$ gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big((1-a)\ln n < S_n < (1+a)\ln n\Big) = 1.$$

Lösning. Det gäller att

$$E[S_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \sum_{1=1}^n \frac{1}{i+1}$$

och eftersom X_i:na är oberoende gäller att

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+1}\left(1 - \frac{1}{i+1}\right).$$

För (b) observera att $\sigma_n^2 < \mu_n$ där $\sigma_n^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)$ och $\mu_n = \mathbb{E}[S_n]$, att $|\mu_n - \ln n| < 1$ och att $\sigma_n^2/\mu_n^2 \to 0$. Därför gäller

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_n - \ln n| > a\ln n) &\le \mathbb{P}(|S_n - \mu_n| > a\mu_n) \\ &\le \frac{\sigma_n^2}{a^2\mu_n^2} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

där den andra olikheten är Chebyshevs olikhet.

7. (5p) Låt $\mu \sim N(0,1)$ och låt sedan $X_1, X_2, \dots, X_n$ vara betingat oberoende givet $\mu = m$ och normalfördelade med väntevärde m och varians 1. Bestäm posterior för μ givet $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$. Beräkna också $\mathbb{P}(\mu < 0 | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ då $n = 10$ och $\overline{x} = 1$.

Lösning. I följande uträkning betyder samtliga proportionalitetssymboler att konstanter som inte har med m att göra förkortas bort. Det gäller att

$$\begin{aligned} f_{\mu|\mathbf{X}}(m|\mathbf{x}) &\propto f_{\mathbf{X}|\mu}(\mathbf{x}|m) f_\mu(m) \\ &\propto e^{-\frac{1}{2}\sum(x_i - m)^2} e^{-\frac{1}{2}m^2} \\ &\propto e^{-\frac{1}{2}((n+1)m^2 - 2m\sum x_i)} \\ &\propto e^{-\frac{n+1}{2}\left(m - \frac{n}{n+1}\overline{x}\right)^2}. \end{aligned}$$

Detta känns igen som tätheten för en normalfördelning med väntevärde $n\overline{x}/(n+1)$ och varians $1/(n+1)$. Detta ger att

$$\mathbb{P}(\mu < a | \mathbf{X} = \mathbf{x}) = \Phi\left(\sqrt{n+1}\left(a - \frac{n\overline{x}}{n+1}\right)\right)$$

och med $\overline{x} = 1$, $a = 0$ och $n = 10$ blir detta

$$\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{11}}\right) \approx 0.00128.$$

8. (5p) Låt X och Y vara positiva kontinuerliga stokastiska variabler med felintensiteter r_X respektive r_Y.

(a) Visa att om $r_X(t) \leq r_Y(t)$ for alla $t > 0$, gäller att $\mathbb{P}(X > x) \geq \mathbb{P}(Y > x)$ för alla $x > 0$.

(b) Beräkna tätheten för X om $r_X(t) = t^2$.

(c) Visa att om $r_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$ gäller att $\mathbb{P}(X = \infty) = e^{-\pi/2}$.

Lösning. Det gäller per definition för en kontinuerlig stokastisk variabel U att $r_U(t) = f_U(t)/G_U(t) = -G'_U(t)/G_U(t)$ där $G_U(t) = \mathbb{P}(U > t)$. Från det följer det

$$\mathbb{P}(U > x) = e^{-\int_0^x r_U(t)dt}.$$

Om $r_X \leq r_Y$ gäller att $\int_0^x r_X(t)dt \leq \int_0^x r_Y(t)dt$ för alla x och därmed $\mathbb{P}(X > x) \geq \mathbb{P}(Y > x)$. För (b) räknar vi ut $\int_0^x t^2 dt = x^3/3$, vilket ger $G(x) = e^{-x^3/3}$ och

$$f(x) = -G'(x) = x^2 e^{-\frac{1}{3}x}.$$

Slutligen gäller enligt kontinuitet för sannolikhetsmått att

$$\mathbb{P}(X = \infty) = \lim_{x \to \infty} \mathbb{P}(X > x)$$

och eftersom

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x$$

får vi

$$\mathbb{P}(X = \infty) = \lim_{x \to \infty} e^{-\arctan x} = e^{-\pi/2}.$$

9. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en okänd fördelning med väntevärde μ och varians σ^2. Man vill göra ett 90% symmetriskt konfidensintervall för σ^2.

(a) (2p) Om man antar att data är normalfördelade, hur gör man då vanligen ett sådant konfidensintervall?

(b) (3p) Om man inte kan göra några fördelningsantaganden om data, hur kan man med hjälp av bootstrap-principen ändå skapa ett approximativt konfidensintervall för σ^2 utifrån samma testfunktion som i (a)?

Lösning: (a) Man använder testfunktionen $T = (n-1)s^2/\sigma^2$ som är χ^2_{n-1}-fördelad. Konfidensintervallet blir då

$$\frac{(n-1)s^2}{F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(0.975)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(0.025)} \quad (95\%).$$

(b) Utan normalfördelningsantagandet vill man approximera $F = F_T$ trots att man inte vet fördelningen för T. Här antar man då att den empiriska fördelningen F^* given av frekvensfunktionen

$$f^*(x_i) = \frac{1}{n}, \; i = 1, \ldots, n$$

där x_i är det observerade värdet av X_i, är sådan att $F^* \approx F$. Det betyder att om man tar ett stickprov $\mathbf{X} = (X_1^*, \ldots, X_n^*)$ enligt F^* så är fördelningen för $T^* = (n-1)s^{2*}/\sigma^{2*}$ ungefär densamma som för T. Simulera nu ett stort antal stickprov $\mathbf{X}^{*(1)}, \ldots, \mathbf{X}^{*(B)}$ enligt F^* och beräkna $T^{*(1)}, \ldots, T^{*(B)}$. Då får vi

$$F_T(x) \approx F_{T^*}(x) \approx \frac{\#\{1 \leq i \leq B : T^{*(i)} \leq x\}}{B}.$$

Ersätt slutligen $F_{\chi^2_{n-1}}$ med approximationen av F_T i konfidensintervallet i (a).

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101