Mängdlära

Johan Jonasson

Mars 2019

En mängd är en väldefinierad samling element, t.ex.

- $\{Kalle, Lisa, Anna\}$
- $\{1, 7, 18, 23.4\}$
- $\{1, 2, \{1\}\}$
- $\{1, 2, 3, \ldots\}$
- {a,b,c, . . . , å,ä,ö}
- $\{x \in \mathbb{R}_+ : \ln x \leq 6\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 + 1\}$ = grafen till funktionen $y = x^2 + 1$.
- mängden av alla svenska medborgare

Alla sätt att beskriva en mängd så att det inte kan missförstås vad man menar är tillåtna. Ordet "väldefinierad" syftar på att man vill undvika paradoxer, som "mängden av alla mängder som inte innehåller sig själva som element".

Att skriva $x \in A$ betyder att x tillhör mängden A, dvs att x är ett element i A.
Speciella mängder med standardbeteckningar.

- $\mathbb{R} =$ mängden av reella tal
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
- $\mathbb{C} =$ mängden av komplexa tal
- $\mathbb{Q} =$ mängden av rationella tal
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\emptyset = \{\} =$ tomma mängden.

Delmängder: Att skriva $A \subseteq B$ betyder att det för alla $x \in A$ gäller att $x \in B$.

Exempel.

- $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$
- $\{1,2\} \not\subseteq \{1,3,4\}$
- $\mathbb{Z}_+ \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

□

$\mathcal{P}(A) =$ mängden av alla delmängder till A.

Exempel.
Med $A = \{1,2,3\}$ gäller att

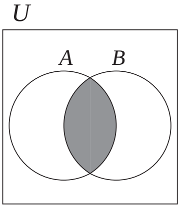
$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

□

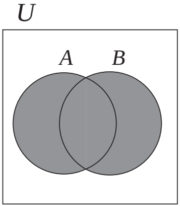
Oftast ser man mängder som delmängder till ett universum, U, som innehåller alla element som man kan tänkas betrakta i den tillämpning man jobbar med. Exempelvis , om man jobbar med ett problem som bara har med mängder av heltal att göra, kan man välja $U = \mathbb{Z}$.

Mängdoperationer:

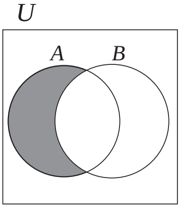
- Komplement: $A^c = \{x \in U : x \notin A\}$.
- Union: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ eller } x \in B\}$.
- Snitt: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ och } x \in B\}$.
- Mängddifferens: $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ och } x \notin B\}$.
- Symmetrisk differens: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.



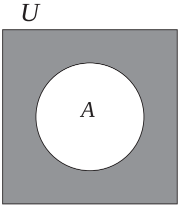
Snitt



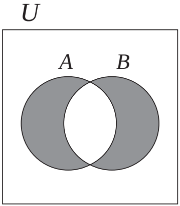
Union



Mängddifferens



Komplement



Symmetrisk mängddifferens

Räkneregler:

- $(A^c)^c = A$

Distributiva lagarna:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

De Morgans lagar:

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Bevis av $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$*:*

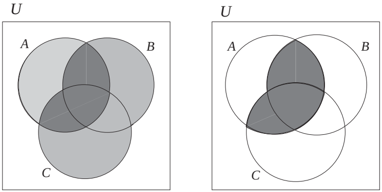
För varje $x \in A \cap (B \cup C)$ gäller $x \in A$ och $x \in B \cup C$. Det senare medför att $x \in B$ eller $x \in C$. Om $x \in B$ gäller alltså $x \in A$ och $x \in B$, dvs $x \in A \cap B$. Om $x \notin B$ måste $x \in C$ och därmed $x \in A$ och $x \in C$. I båda fallen gäller att $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Vi har visat

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Å andra sidan, om $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ gäller att $x \in A \cap B$ eller $x \in A \cap C$. I båda fallen gäller att $x \in A$ och $x \in B \cup C$, dvs $x \in A \cap (B \cup C)$. Vi har visat

$$A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$\square$



Figur: Den nyss bevisade likheten: $A \cap (B \cup C)$ till vänster och $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ till höger.

Exempel. $A = \{\text{b,a,r,n}\}$, $B = \{\text{v,a,g,n}\}$, $C = \{\text{b,l,ö,j,a}\}$.

$$A \cap (B \cup C) = \{\text{b,a,r,n}\} \cap \{\text{v,a,g,n,b,l,ö,j}\} = \{\text{b,a,n}\}.$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{\text{a,n}\} \cup \{\text{b,a}\} = \{\text{b,a,n}\}.$$

$\square$

Mer generella regler.

Distributiva lagarna:

- $A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap B_n)$
- $A \cup (\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(A \cup B_n)$

De Morgans lagar:

- $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^c$
- $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^c$

Exempel. Låt

$$U = \{(x_1, x_2, \ldots) : \forall n : x_n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\},$$

dvs U är mängden av alla tänkbara följder av utfall man kan får när en tärning slås oändligt många gånger.

Mängden A av alla utfall sådana att medelvärdet av de åtta första kasten är minst 4 kan skrivas

$$A = \left\{(x_1, x_2, \ldots) \in U : \sum_{n=1}^{8} x_i \geq 32\right\}.$$

Mängden B av alla utfall som innehåller minst en sexa kan skrivas som $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ där $B_n = \{(x_1, x_2, \ldots) \in U : x_n = 6\}$.
Mängden B^c är då mängden av utfall som inte innehåller någon sexa alls.

$$A \cap B = \{(x_1, x_2, \ldots) : \sum_{n=1}^{8} x_n \geq 32 \text{ och } x_n = 6 \text{ för minst ett } n\}.$$

$\square$.

Mängderna A och B sägs vara *disjunkta* om $A \cap B = \emptyset$.

- Mängderna $\{a, b, c\}$ och $\{c, d, e\}$ är inte disjunkta.
- Mängderna $[-10, 3]$ och $[4, 7]$ är disjunkta.
- Mängderna $[0, 1/2)$, $[1/2, 3/4)$, $[3/4, 7/8)$, $[7/8, 15/16)$, $\ldots$ är alla parvis disjunkta (och deras union är $[0, 1)$).

Växande och avtagande följder av mängder:

Exempel. Låt $A_n = [0, 1 - 1/n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Då gäller att $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \ldots$ och

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0, 1).$$

Låt $B_n = [0, 2 + 1/n)$. Då gäller $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ och

$$B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = [0, 2].$$

Låt $C_n = [n, \infty)$. Dår gäller $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots$ och

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset.$$

Man skriver $A_n \uparrow A$ och $B_n \downarrow B$ och $C_n \downarrow C$.

Observera att

- $\ell(A_n) \to \ell(A)$,
- $\ell(B_n) \to \ell(B)$, men
- $\ell(C_n) \not\to \ell(C)$.

$\square$

Om $B_1, B_2, \ldots$ är en följd av mängder och man skriver

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i,\ C_n = \bigcap_{i=1}^{n} B_i$$

och

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,\ C = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$$

gäller att $A_n \uparrow A$ och $C_n \downarrow C$.

Med B_n som i tärningsexemplet gäller

- $A_n =$ mängden av utfall med minst en sexa på de n första kasten
- $A =$ mängden av utfall med minst en sexa (någonsin)
- $C_n =$ mängden av utfall där alla de n första kasten är sexor
- $C =$ mängden av utfall där alla kast ger en sexa $= \{(6, 6, 6, \ldots)\}$.