

Kapitel 2

Mängdlära

2.1 Mängder

Vi har redan stött på begreppet mängd. Med en *mängd* menar vi en *väldefinierad* samling av objekt eller *element*. Ordet "väldefinierad" syftar på att man för varje tänkbart objekt x otvetydigt skall kunna avgöra om x hör till mängden eller ej. Att bara säga att en mängd är en samling element är inte så problemfritt som man skulle kunna tro; vad som ser ut att vara en mängd kan istället vara en paradox på samma sätt som "påståendet" "detta påstående är falskt" är en paradox och inte en logisk utsaga. Ett problem ligger i att elementen i en mängd själva kan vara mängder. Ibland kan en mängd till och med vara ett element i sig själv. Man kan till exempel tänka sig mängden av alla mängder. Med detta som grund kan man skapa paradoxer. Bilda till exempel "mängden" A som mängden av alla mängder som inte är element i sig själva. Mer precist: A är mängden som består av alla mängder B som är sådana att B inte är ett element i B . Låt oss nu fråga oss om A själv är ett element i A . Då får vi en paradox: Om A inte tillhör A , så följer att A tillhör A per definition av A . Om A tillhör A , så följer att A inte tillhör A av samma skäl. Paradoxer av denna typ utvecklades under senare delen av 1800-talet av den italienske logikern Burali-Forti och senare också av Bertrand Russell. Detta påkalla-

de en utveckling av mängdläran som ett axiomatiskt system där paradoxer undviks. Det finns flera olika sådana system: Zermelo-Fraenkel-von Neumann-systemet, Gödel-Hilbert-Bernay-systemet, Russell-Whitehead-systemet. Vi går i den här framställningen inte in på något av detta utan sopar problemet med en rigorös definition av mängdbegreppet under mattan genom att helt enkelt säga att en mängd är en *väldefinierad* samling element. Vi kommer inte att stöta på problem på grund av detta.

Mängdläran kan, liksom logiken, egentligen inte sägas vara en del av matematiken utan är, också liksom logiken, en förutsättning för matematiken. De är båda en del av matematikens struktur och språk. Vi har redan sett att mängdbegreppet dyker upp i en del av matematikens axiom.

Det enklaste sättet att ange en (inte alltför stor) mängd är att helt enkelt lista deras element inom klamrar. Exempelvis är $\{1, 2, 3\}$ mängden som har talen 1, 2 och 3 som element, medan $\{\text{Maria, Anna, Peter, Göran}\}$ är mängden som har namnen Maria, Anna, Peter och Göran som element. Mängder är dock ofta stora eller till och med oändliga och då brukar man ange dem genom att utnyttja ett mönster eller helt enkelt tala om vilka element mängden har. Exempelvis kan mängden $\mathbb{Z}_+$ av alla positiva heltal anges som

$$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

eller helt enkelt bara som just "mängden av positiva heltal". Ett annat exempel är mängden av bokstäver i det svenska alfabetet som vi kan ange som

$$\{a, b, c, \dots, z, \text{å, ä, ö}\}.$$

Ett tredje exempel är mängden av alla svenska medborgare, en mängd som knappast kan anges på annat sätt. I dessa exempel ser vi mängder som anges av att deras element har en viss egenskap, E . Ett annat sätt att skriva en sådan mängd är $\{x : x \text{ har egenskapen } E\}$. Som exempel kan vi ta att $\mathbb{Z}_+ = \{x : x \text{ är ett positivt heltal}\}$.

Man brukar använda versaler A , B , C etc som namn på mängder.

Om x är ett element i mängden A så skriver man

$$x \in A$$

vilket utläses som att " x tillhör A ". Om x inte är ett element i A så skriver man $x \notin A$ (d. v. s. $x \notin A$ är ekvivalent med $\neg[x \in A]$). För att koppla ihop detta med logiken noterar vi att $x \in A$ är ett predikat, d. v. s. för varje objekt x gäller att $x \in A$ är ett påstående med ett väldefinierat sanningsvärde.

Exempel 2.1. Det finns ett antal talmängder som används ofta i matematiken och som därför fått vedertagna och fasta beteckningar som är bra att känna till. Vi kommer att använda dem flitigt framöver. Här följer en lista över de viktigaste:

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &= \text{mängden av reella tal,} \\ \mathbb{C} &= \text{mängden av komplexa tal,} \\ \mathbb{Q} &= \text{mängden av rationella tal,} \\ \mathbb{Z} &= \text{mängden av heltal} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}, \\ \mathbb{Z}_+ &= \text{mängden av positiva heltal} = \{1, 2, 3, \dots\}, \\ \mathbb{N} &= \text{mängden av naturliga tal} = \{0, 1, 2, \dots\}, \\ \emptyset &= \text{den tomma mängden} = \{\}.\end{aligned}$$

□

Vi avslutar avsnittet med en praktisk beteckning. Om A är en ändlig mängd så betecknar man antalet element i A med $|A|$. Utsagan att A är en oändlig mängd kan man då kort skriva $|A| = \infty$. Observera också i det här sammanhanget att ett element kan inte "finnas med flera gånger" i en mängd, så att t. ex. är $|\{1, 2, 3, 2, 1\}| = 3$.

2.2 Delmängder

Definition 2.2. Om A och B är mängder sådana att det för alla x gäller att $x \in A \Rightarrow x \in B$, så säger vi att A är en *delmängd* av B och att A är *inhållen* eller *inkluderad* i B och vi skriver

$$A \subseteq B.$$

Om det både gäller att $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$, så säger vi att $A = B$. Om A är en delmängd av B och $A \neq B$, så säger man att A är en *äkte* delmängd av B och skriver $A \subset B$.

Anmärkning 2.3. Av definitionen för delmängd så följer det att $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$, d. v. s. $A = B$, om och endast om det för alla x gäller att $x \in A \Rightarrow x \in B$ och $x \in B \Rightarrow x \in A$. Med andra ord så är $A = B$ om och endast om $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

I en del böcker betecknar symbolen ' $\subset$ ' delmängd och inte äkte delmängd, så man bör vara lite uppmärksam på vad som avses. $\square$

Hur gör man då för att visa att en mängd A är en delmängd i en annan mängd B ? Jo, man kan använda definitionen direkt genom att ta ett godtyckligt element i A och sedan visa att det också finns i B .

Exempel 2.4. Vi använder talmängderna i exemplet ovan till att illustrera delmängdsbegreppet. Först ser vi att $\emptyset \subseteq A$ för alla mängder A , eftersom $x \in \emptyset$ aldrig är uppfyllt så $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ oavsett vad A är. Sedan inser vi att vi har följande inklusioner:

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Att $\mathbb{Q}$ är en äkte delmängd till $\mathbb{R}$ är inte självklart. Det är inte uppenbart att det finns reella tal som inte kan skrivas som kvoten mellan två heltal. Mot slutet av kapitel 5 om heltalen kommer vi att kunna visa detta. $\square$

Man har ofta anledning att betrakta speciella delmängder av de reella talen, nämligen *intervall*. Ett intervall är mängden av tal mellan något minsta värde och något största värde. Beroende på om man menar att de två gränspunkterna ska ingå i intervallet eller inte formuleras detta på olika sätt: Låt a och b vara två reella tal sådana att $a \leq b$. Vi definierar då ett slutet intervall $[a, b]$ som mängden

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

och ett öppet intervall (a, b) som mängden

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Med andra ord: Hakparentes betyder ”ta med gränspunkten” medan vanlig parentes betyder ”ta inte med gränspunkten”. Med den principen kan man också konstruera de varianter där den ena gränspunkten finns med men inte den andra, d. v. s.

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \text{ och } (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

Andra intervall är sådana som bara är begränsade åt ena hållet:

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \text{ och } [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\},$$

vilka också förstås förekommer med vanlig parentes vid a ’et med precis den betydelse man tror.

I många sammanhang är det naturligt att se de mängder man arbetar med som delmängder till något universum, U . Om till exempel K är mängden av konsonanter i det svenska alfabetet och V är mängden av vokaler är det naturligt att se dessa som delmängder av mängden U av alla bokstäver. Om man arbetar med mängderna $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ och $\mathbb{Q}$ är det naturligt att se dessa som delmängder av mängden $U = \mathbb{R}$. I fortsättningen kommer vi alltid att se mängder som delmängder till ett universum.

2.3 Mängdoperatorer

Precis som inom logiken så finns det ett antal operatorer på mängder. Som vi kommer att se så finns det ett mycket intimt samband mellan logikoperatorerna och mängdoperatorena. Låt A och B vara två delmängder till ett universum U . Vi definierar följande mängdoperatorer:

- Snitt: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\},$

- Union: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$,
- Mängddifferens: $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$,
- Komplement: $A^c = U \setminus A$,
- Symmetrisk mängddifferens: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Figur 2.1: De olika mängdoperatorerna.

Ett annat ord för ”snitt” är ”skärning”. För att ordentligt ta till sig vad olika mängdoperatorer verkligen innebär har man mycket hjälp av illustrationer, så kallade *Venn diagram*. I figur 2.1 illustreras de ovan definierade mängdoperatorerna; de skuggade områdena anger resultatet av respektive operator.

Några viktiga räkneregler för mängdoperatorerna ges i tabellen nedan. Jämför denna med tabellen på sidan 13 med räkneregler för de logiska operatorerna. De påminner en del om varandra, eller hur?

Alla räkneregler i tabellen utom den sista, $A \setminus B = A \cap B^c$, har en motsvarande regel i tabellen på sidan 13. För att bevisa räkneregler för mängdoperatorer så kan man utnyttja dess motsvarighet i logiktabellen. Dessa har vi ju redan bevisat så de kan vi använda för att visa nya satser. Vi bevisar den första av de Morgans lagar, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, och lämnar de övriga som har en motsvarande regel i tabellen på sidan 13 som övning. Alla bevisen följer exakt samma mönster.

Tabell 2.1: Räkneregler inom mängdläran.

Regel	Namn
$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$	identitet
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	dominans
$A \cup A^c = U$ $A \cap A^c = \emptyset$	
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	idempotens
$(A^c)^c = A$	dubbelt komplement
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	kommutativitet
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	associativitet
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	distributivitet
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	deMorgan
$A \setminus B = A \cap B^c$	

Vi påminner först om att för att visa $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, så gäller det att visa att $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$ för alla x . Låt x vara ett godtyckligt element i ett universum U . Genom att utnyttja definitionerna av mängdoperatorerna och den första av de Morgans lagar för de logiska operatorerna så får vi:

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \Leftrightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c. \end{aligned}$$

Eftersom x var godtyckligt valt så gäller slutsatsen för alla x och det är därmed bevisat att $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Den sista räkneregeln i tabellen har ingen direkt motsvarighet eftersom vi inte definierat någon motsvarande logisk operator för mängddifferens. Vi ger därför ett bevis också av denna. Vi ska visa att $A \setminus B = A \cap B^c$, d. v. s. $x \in A \setminus B$ om och endast om $x \in A \cap B^c$ för alla x . Villkoret $x \in A \setminus B$ betyder per definition $x \in A \wedge x \notin B$. Eftersom $x \notin B$ per definition av komplement betyder $x \in B^c$ så är detta ekvivalent med $x \in A \wedge x \in B^c$. Detta i sin tur är just betydelsen av $x \in A \cap B^c$. Eftersom x var ett godtyckligt valt element så gäller för alla x att $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \cap B^c$. Därmed är det bevisat att $A \setminus B = A \cap B^c$.

Innan man börjar försöka bevisa (eller ge motexempel till) ett påstående om att två mängduttryck är lika är det en god idé att övertyga sig själv om att påståendet är korrekt (eller felaktigt). Det är då en god hjälp att konstruera två Venndiagram där man ritar den vänstra mängden i det ena Venndiagrammet och den högra i det andra. Om de två bilderna visar sig illustrera samma mängd är detta åtminstone en god indikation på att påståendet är korrekt, medan två bilder som visar på olika mängder i sig utgör ett motexempel mot påståendet. I figur 2.2 illustreras den andra av de distributiva lagarna i tabellen på sidan 45. Den vänstra bilden har A och $B \cup C$ ljust skuggade, medan $A \cap (B \cup C)$ är mörkt skuggad. På den högra sidan är mängden $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ mörkt skuggad. Man ser att de mörkt skuggade mängderna på de bägge bilderna stämmer överens. Alltså verkar det som om att den påstådda likheten är korrekt.

Figur 2.2: Den fjärde likheten från slutet i tabellen på sidan 45 illustrerad med hjälp av Venndiagram.

Det är frestande att också tro att om den påstådda likheten gäller för bilderna så gäller den också generellt, men tyvärr är bilderna bara ett exempel på hur de ingående mängderna skulle kunna se ut, medan påståendet gäller för *alla* tänkbara ingående mängder. Ett rigoröst bevis måste bestå av observationer som gäller oavsett hurdana de involverade mängderna råkar vara. Därför är ett bevis där man enbart använder definitionen av operatorerna och logik definitivt att föredra om man vill känna att man har helt torrt under fötterna. Bevis som bara utnyttjar bilder ska man alltid vara kritisk till. Bilder är utmärkta som illustration, men det är lätt att låta sig luras av en bild. Logiska argument kan man däremot alltid kontrollera om de är korrekta.

En ytterligare mängdoperator som vi kommer att få anledning att använda oss av är den s.k. *kartesiska produkten* av två mängder: Låt A och B vara mängder. Då är den kartesiska produkten, $A \times B$, den mängd som har som element alla ordnade par (a, b) sådana att $a \in A$ och $b \in B$. Med andra ord

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Termen *ordnat par* betyder helt enkelt att ordningen spelar roll, så att $(a, b) = (c, d)$ om och endast om $a = c$ och $b = d$. Till exempel är $(0, 1) \neq (1, 0)$.

Exempel 2.5. 1. Talplanet $\mathbb{R}^2$ är den kartesiska produkten

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}.$$

2. Om $A = \{\text{Nils}, \text{Roy}\}$ och $B = \{\text{Anna}, \text{Sofie}\}$, så är

$$A \times B = \{(\text{Nils}, \text{Anna}), (\text{Nils}, \text{Sofie}), (\text{Roy}, \text{Anna}), (\text{Roy}, \text{Sofie})\} \quad \square$$

Observera i det första exemplet att man skiljer på paret (x, y) och paret (y, x) ; de svarar ju mot olika punkter i planet. En konsekvens av detta är att man i allmänhet måste skilja på paren (a, b) och (b, a) . Speciellt om A och B är olika mängder, så blir $A \times B$ och $B \times A$ olika mängder.

Innan vi lämnar detta kapitel bör vi slutligen känna till potensmängden, $\mathcal{P}(A)$, som är *mängden av alla delmängder till A* . Det här är det första exempel vi stöter på där en mängd har element som själva är mängder. Detta är inget som bör skrämma oss; att mängder är element i en mängd är inte konstigare än att bilar eller människor eller tal är det.

Exempel 2.6. 1. Om $A = \{1, 2, 3\}$ så är

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

2. Om $B = \{\text{banan}, \text{äpple}\}$ så är

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{\text{banan}\}, \{\text{äpple}\}, \{\text{banan}, \text{äpple}\}\}. \quad \square$$

I samband med detta är det på sin plats att påpeka att mängder som bara innehåller ett enda element inte ska sammanblandas med elementet självt. Se till exempel på det första exemplet. I $\mathcal{P}(A)$ finns mängden $\{1\}$ med som element, men detta betyder inte att talet 1 finns som element i denna mängd; talet 1 är inte samma sak

som mängden $\{1\}$. En bra liknelse är observationen att "en låda som innehåller en hatt är inte samma sak som en hatt".

Låt oss observera att om A är en ändlig mängd med n element, d. v. s. $|A| = n$, så innehåller $\mathcal{P}(A)$ precis 2^n element. Detta följer av att om man ska välja ut en delmängd B till A så har man för varje element $a \in A$ två val; ta med a i B eller ta inte med a i B . Eftersom man har detta val för varje a i A betyder det när man går igenom elementen i A finns det totalt 2^n vägar att gå. Var och en av dessa svarar mot olika delmängder B . Således finns det 2^n olika delmängder till A .

2.4 Sammanfattning

Med en *mängd* menar vi en *väldefinierad* samling av objekt eller *element*. Ordet "väldefinierad" syftar på att man för varje tänkbart objekt x otvetydigt skall kunna avgöra om x hör till mängden eller ej. Om x är ett element i mängden A så skriver man

$$x \in A$$

vilket utläses som att " x tillhör A ". Om x inte är ett element i A så skriver man $x \notin A$.

Det enklaste sättet att ange en inte alltför stor mängd är att helt enkelt lista deras element inom klamrar. Mängder som anges av att deras element har en viss egenskap, E , kan skrivas som $\{x : x \text{ har egenskapen } E\}$.

Viktiga mängder med speciella beteckningar:

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &= \text{mängden av reella tal,} \\ \mathbb{C} &= \text{mängden av komplexa tal,} \\ \mathbb{Q} &= \text{mängden av rationella tal,} \\ \mathbb{Z} &= \text{mängden av heltal} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}, \\ \mathbb{Z}_+ &= \text{mängden av positiva heltal} = \{1, 2, 3, \dots\}, \\ \mathbb{N} &= \text{mängden av naturliga tal} = \{0, 1, 2, \dots\}, \\ \emptyset &= \text{den tomma mängden} = \{\}.\end{aligned}$$

Definition. Om A och B är mängder sådana att det för alla x gäller att $x \in A \Rightarrow x \in B$, så säger vi att A är en *delmängd* av B och att A är *innehållen* eller *inkluderad* i B och vi skriver

$$A \subseteq B.$$

Om det både gäller att $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$, så säger vi att $A = B$. Om A är en delmängd av B och $A \neq B$, så säger man att A är en *äkta* delmängd av B och skriver $A \subset B$.

Ett *intervall* är mängden av reella tal mellan något minsta värde och något största värde. Beroende på om man menar att de två gränspunkterna ska ingå i intervallet eller inte formuleras detta på olika sätt. Ett slutet intervall $[a, b]$ är mängden

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

och ett öppet intervall mängden

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Går även att ha öppet i en ända och slutet i den andra.

Viktiga operatorer på mängder är:

- Snitt: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\},$

- Union: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$,
- Mängddifferens: $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$,
- Komplement: $A^c = U \setminus A$,
- Symmetrisk mängddifferens: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Mängder och relationer mellan dessa kan illustreras med hjälp av s. k. *Venn-diagram*.

Den *kartesiska produkten* av två mängder A och B är

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Potensmängden av en mängd A , $\mathcal{P}(A)$, är *mängden av alla delmängder till A* .

Sats. Om A är en ändlig mängd med n element, så innehåller $\mathcal{P}(A)$ precis 2^n element.

Basövningar

Avsnitt 2.1 – 2.2.

2.1 (s) Vilka är elementen i följande mängder?

- a) $\{x \in \mathbb{Z}_+ : 7 < x < 12\}$,
- b) $\{x \in \mathbb{Z}_+ : x > 12 \wedge x < 7\}$,
- c) $\{x \in \mathbb{Z}_+ : x^2 > 8 \wedge x > 8\}$,
- d) $\{x \in \mathbb{Z}_+ : 5 \leq x < 9\}$.

2.2 (s) Låt $A = \{0, \{1\}, \emptyset, \{2, 3\}\}$. Vilka av följande påståenden är sanna?

- a) $\emptyset \subset A$,
- b) $\emptyset \in A$,
- c) $1 \subseteq A$,
- d) $\{1\} \in A$,
- e) $\{1\} \subseteq A$,
- f) $\{\{1\}\} \subseteq A$,
- g) $\{1, 2, 3\} \subseteq A$,
- h) $\{0, 1\} \in A$.

2.3 (s) Låt $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : 3 < x < 11\}$ och $C = \text{“mängden av alla udda heltal”}$.

- a) Vad är $A \cup B$?
- b) Vad är $A \cap C$?
- c) Vad är $B \cap C$?

2.4 (s) Låt $A = \{5, a, 32, \text{flodhäst}, r\}$, $B = \{f, l, o, d\}$, $C = \{h, ä, s, t\}$ och $D = \text{“Mängden av alla bokstäver i svenska alfabetet”}$.

- a) Bestäm $A \cap \mathbb{Z}$.
- b) Bestäm $B \cup C$.
- c) Bestäm $A \cap C$.
- d) Bestäm $(B \cup C \cup A) \cap D$.

Avsnitt 2.3.

2.5 (s) Låt $A = \{1, 2\}$.

- a) Bestäm potensmängden $\mathcal{P}(A)$.
- b) Bestäm den Kartesiska produkten $A \times \mathcal{P}(A)$.

2.6 (s) Om A är en mängd med m element och B är en mängd med n element, hur många element finns det då i $A \times B$? (Med andra ord om $|A| = m$ och $|B| = n$, vad blir då $|A \times B|$?) Hur många element finns det i $\mathcal{P}(A \times B)$?

2.7 (s) Om $A \subseteq B$, vad blir då $A \cap B$, $A \setminus B$ och $A \cup B$?

2.8 (s) Antag att $A \setminus B = \{a, c, k\}$, $B \setminus A = \{b, f\}$ och $A \cap B = \{s, t, v, x\}$. Vad är då A och vad är B ?

2.9 (s) Antag att $|A| = a$, $|B| = b$ och $|A \cap B| = c$. Vad är då $|A \cup B|$?

2.10 (w) Låt A , B och C vara delmängder till ett universum U .

- a) Illustrera de tre mängderna $A \cap (C \setminus B)$, $B \cap (C \setminus A)$ och $(A \Delta B) \cap C$ med Venn-diagram.
- b) Motivera att $(A \cap (C \setminus B)) \cup (B \cap (C \setminus A)) = (A \Delta B) \cap C$.

2.11 (s) Antag att A , B och C är tre mängder för vilka det gäller att $|A| = 14$, $|C| = 27$, $|A \cap B| = 4$, $|A \cap C| = 6$, $|B \cap C| = 16$, $|A \cap B \cap C| = 3$ och $|A \cup B \cup C| = 41$. Hur många element finns det då i B ?

Blandade övningar

2.12 (l) Visa att om $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ så gäller att $A = B$.

2.13 (l) Bevisa ett par av de likheterna i tabellen på sidan 45 som inte bevisades i texten.

2.14 (l) Är det sant att det för alla mängder A , B och C gäller att $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$? Är det sant att $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$? Bevisa eller ge motexempel.

2.15 (w) Låt A , B och C vara tre mängder sådana att A och B är disjunkta (dvs $A \cap B = \emptyset$), $|A \cup B \cup C| = 30$, $|A \setminus C| = 10$ och $|B \setminus C| = 5$. Vad är det högsta respektive minsta antal element som C kan innehålla?

2.16 (sw) Låt A , B och C vara delmängder till ett universum U . Vilka av följande påståenden är sanna (för alla möjliga val av mängder A , B , C och U) och vilka är falska?

- a) $A \Delta A^c = U$
- b) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$
- c) $A \times B = B \times A$
- d) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
- e) $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$